Staatliche Bibliothek
Regensburg

Philos. 5236/4

Geschenk

v. D. Steinberg

Georg Freyherrn von Vega,

Landes-Mitſtands des Herzogthums Krains, Ritters des milit. M. Th. Ordens, Oberſt-Lieutenants des k. k. vierten Feldartillerie-Regiments, Mitgliedes der gelehrten Geſellſchaften der Wiſſenſchaften zu Berlin, Erfurt, Göttingen und Prag,

Bibliothek des K. Alten Gymnasiums in Regensburg.

Vorleſungen über die Mathematik.

Vierter Band,

die Grundlehren der Hydroſtatik, Aeroſtatik, Hydraulik, und der Bewegung feſter Körper in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel enthaltend.

Zu mehrerer Verbreitung mathematiſcher Kenntniſſe in den k. k. Staaten, und zum Gebrauche des k. k. Artillerie-Corps.

Zweyte verbeſſerte Auflage.

Mit IX. Kupfertafeln.

Wien, 1819.
Bey Franz Tendler, Buchhändler am Graben im Trattnerhofe.

Staatliche Bibliothek
Regensburg

S. 1965/833

Anleitung

zur

Hydrodynamik.

Von

Georg Freyherrn von Vega,

Landes-Mitſtand des Herzogthums Krain, Ritter des milit. M. Th. Ordens, Oberſt-Lieutenant des k. k. vierten Feldartillerie-Regiments, Mitglied der gelehrten Geſellſchaften der Wiſſenſchaften zu Berlin, Erfurt, Göttingen und Prag.

Zweyte verbeſſerte Auflage.

Mit IX Kupfertafeln.

Wien, 1819.

Bey Franz Tendler, Buchhändler am Graben im Trattnerhofe.

Inhalt.

Erſtes Hauptſtück

Grundlehre der Hydroſtatik.

I. Abſchnitt.

Allgemeine Grundlehre des Gleichgewichtes der Kräfte bey flüſſigen Körpern.

§. 1. Gewöhnliche Erklärung einer flüſſigen Maſſe. Zwey gleiche Kräfte nach entgegengeſetzten Richtungen gegen zwey Elementar-Theilchen einer flüſſigen nicht eingeſchloſſenen Maſſe angebracht können einander nicht im Gleichgewichte erhalten, weil die Theilchen ſelbſt durch die geringſte Kraft an einander beweglich ſind. §. 2. Von elaſtiſchen und unelaſtiſchen flüſſigen Maſſen. §. 3. Erklärungen der Worte, Hydroſtatik, Aeroſtatik, Hydraulik, Pneumatik, Hydrodynamik. Bemerkungen über die gewöhnliche Erklärung der flüſſigen Körper. Kants und Schönbergers Erklärungen der flüſſigen Maſſe, und daraus abgeleitete Folgen. §. 4. Bey der Beſtimmung des Gleichgewichtes werden die flüſſigen Maſſen anfangs ohne Schwere betrachtet. §. 5. Eine Haupteigenſchaft einer jeden flüſſigen Maſſe iſt, daß ein angebrachter Druck gegen irgend einen Theil einer in einem unbeweglichen Gefäße gänzlich eingeſchloſſenen Flüſſigkeit wegen der Beweglichkeit ihrer Elementar-Theilchen an einander ſich nach allen Richtungen in ſeiner ganzen Stärke fortpflanzet. Erläuterung dieſer Haupteigenſchaft. §. 6. Der unmittelbare Druck iſt von dem fortgepflanzten unterſchieden. §. 7. Es verhält ſich der fortgepflanzte Druck gegen eine ebene Fläche zum unmittelbaren Drucke gegen eine andere Fläche, wie die erſte Fläche zur zweyten. Daraus abgeleitete Folgen und Bemerkungen.

II. Abſchnitt.

Allgemeine Grundlehren des Gleichgewichtes des ſchweren Waſſers in Gefäßen.

§. 8. Der unmittelbare Druck eines jeden Elementar=Theilchens des ſchweren Waſſers gegen das zu nächſt unter ihm liegende iſt ſeinem Gewichte gleich. §. 9. Im Stande des Gleichgewichtes leidet jedes Elementar=Theilchen von allen Seiten her einen gleich großen fortgepflanzten Druck. §. 10. Schweres Waſſer kann nur dann ruhen, wenn die Oberfläche desſelben horizontal iſt. Ausnahmen hiervon werden durch andere Kräfte bewirket. Bey ausgebreiteten Gewäſſern iſt die Oberfläche keine ebene, ſondern eine krumme Fläche. Bey dem Weltmeere iſt ſie wegen der Umdrehungsbewegung der Erde elliptoidiſch. §. 11. Der Druck gegen die horizontale Bodenfläche eines mit Waſſer angefüllten ſenkrechten prismatiſchen Gefäßes iſt dem Gewichte des darin enthaltenen Waſſers gleich. §. 12. Das Gewicht einer Waſſerſäule wird gefunden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe und mit dem eigenthümlichen Gewichte des Waſſers multipliciret. Wie groß das eigenthümliche Gewicht des Waſſers ſey? d. i. wie viel ein Kubikfuß oder Kubikzoll wiege? §. 13. Die Höhe des Druckes iſt dem Quotienten gleich, welcher entſteht, wenn man den Druck durch das Product aus der Fläche des Druckes in das eigenthümliche Gewicht des Waſſers dividiret. §. 14. In einem Gefäße von einem ebenen horizontalen Boden iſt die Höhe des gegen die Bodenfläche fortgepflanzten Druckes ſo groß, als der Abſtand der oberſten Fläche des Waſſers von der horizontalen Bodenfläche. Jedes Elementar=Theilchen des Gefäßes leidet einen Druck, der dem Gewichte eines Waſſerſäulchens gleich iſt, welches dasſelbe Elementar=Theilchen zur Grundfläche, und die Höhe des darüber ſtehenden Waſſers zur Höhe hat. Wirkung des anatomiſchen Hebers. Vorſicht beym Baue der Schleuſen. §. 15. Der Druck des Waſſers gegen eine ebene Fläche des Umfanges des Gefäßes iſt dem Gewichte einer Waſſerſäule gleich, welche dieſe Fläche zur Grundfläche, und den Abſtand ihres Schwerpunctes von der Oberfläche des Waſſers zur Höhe hat. §. 16. Den fortgepflanzten Druck des Waſſers gegen eine nicht horizontale ebene Fläche eines Gefäßes kann man ſich in dem Schwingungspuncte eben dieſer Fläche, in Hinſicht auf die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie der Oberfläche des Waſſers mit der Ebene der gedrückten Fläche, vereiniget denken. Beſtimmung dieſes Punctes, wenn die gedrückte Fläche ein Rechteck, eine Kreisfläche, ein rechtwinkeliges Dreyeck iſt; u. ſ. w. §. 17. In vereinigten Röhren iſt die höchſte Waſſerfläche in beyden Röhren in einer und derſelben horizontalen Ebene. Hydroſtatiſche Nivellier=Wage. §. 18. In vereinigten Röhren verhalten ſich die Erhöhungen der oberſten Flächen verſchiedener Flüſſigkeiten über eine horizontale Gleichgewichts=Ebene (unter welcher das Flüſſige für ſich allein im Gleichgewichte iſt) umgekehrt wie ihre eigenthümlichen Gewichte. §. 19. Hülfſätze um die Preſſungen einer flüſſigen Maſſe gegen verſchiedentlich geneigte Ebenen nach jeder gegebenen Richtung zu vereinigen.

1)

1.) Der ſenkrechte Querſchnitt eines ſchief abgeſchnittenen Prisma iſt gleich dem ſchiefen Schnitte desſelben multipliciret mit dem Coſinus des Neigungswinkels beyder Schnitte. 2. Aus der ſenkrechten Preſſung des Waſſers gegen einen ſchiefen Schnitt eines Prisma entſteht nach der Richtung der Achſe des Prisma ein Druck, der ſo groß iſt, als das Gewicht einer Waſſerſäule, welche den ſenkrechten Querſchnitt des Prisma zur Grundfläche, und die Höhe des ſenkrechten Druckes gegen den ſchiefen Schnitt zu ihrer Höhe hat. §. 20. Aus allen ſenkrechten Preſſungen gegen die Theile des feſten Umfanges des Gefäßes entſteht ein vertikaler Druck nach unten, der dem Gewichte des ſämmtlichen im Gefäße enthaltenen Waſſers gleich iſt. Alle Preſſungen aber nach horizontalen Richtungen heben einander auf.

III. Abſchnitt.

Grundlehre des Gleichgewichtes des ſchweren Waſſers mit hineingetauchten feſten Körpern.

§. 21. Ein in ein ruhende flüſſige Maſſe ganz, oder auch nur zum Theile eingetauchter feſter Körper leidet einen Druck von unten nach oben (einen Auftrieb), der dem Gewichte der verdrängten Flüſſigkeit gleich iſt. Die verticale Richtungslinie dieſes Druckes geht durch den Schwerpunct des geometriſchen Raumes des eingetauchten feſten Körpers oder der verdrängten Flüſſigkeit, und die horizontalen Preſſungen gegen den Umfang des eingetauchten Körpers ſind im Gleichgewichte. §. 22. Der Auftrieb wird größer oder kleiner, je nachdem ein größererder kleinerer Theil des feſten Körpers eingetauchet wird. Bey dem Eintauchen des ganzen Körpers aber bleibt er in jeder Tiefe unverändert, wenn nur die flüſſige Maſſe gleichförmig dicht iſt. §. 23. Ein in eine flüſſige Maſſe ganz eingetauchter feſter Körper bleibt in jeder Tiefe im Gleichgewichte, wenn das Gewicht der Flüſſigkeit von eben demſelben Kubikinhalte dem Gewichte des Körpers gleich iſt. Iſt es aber größer oder kleiner, ſo muß der eingetauchte feſte Körper im erſten Falle in die Höhe ſteigen, und im zweyten Falle ſinken. §. 24. Iſt ein ganz eingetauchter feſter Körper von gleichförmiger Dichtigkeit; ſo iſt der Schwerpunct desſelben auch zugleich der Schwerpunct der verdrängten Flüſſigkeit. Iſt aber der feſte Körper ungleichförmig dicht, ſo nimmt er eine ſolche Lage ein, daß der Schwerpunct desſelben unter dem Schwerpuncte der verdrängten Flüſſigkeit ſich befindet. §. 25. Ein feſter Körper ſchwimmet, wenn er im Stande des Gleichgewichtes aus der flüſſigen Maſſe hervorraget. Verſchiedene Arten ſchwimmender Körper. §. 26. Unterſuchung, ob ein feſter Körper ſchwimmen werde oder nicht. §. 27. Das Gewicht eines beladenen Schiffes iſt dem Producte aus dem Kubikinhalte des verdrängten Waſſers in das eigenthümliche Gewicht des Waſſers gleich. Benutzung des Auftriebes. §. 28. Zum Gleichgewichte eines ſchwimmenden Körpers wird erfordert, daß die Schwerpuncte der verdrängten Flüſſigkeit und des ſchwimmenden Körpers in einer und derſelben Vertical-Linie ſich be-

befinden. §. 29. Unterſuchung, ob das Gleichgewicht eines ſchwimmenden Körpers ſtandhaft, unſtandhaft (wankend), oder gleichgültig ſey. Begriff von Metacentrum. §. 30. Beſtimmung der Standhaftigkeit des Gleichgewichtes bey einem ſchwimmenden Körper. §. 31. Berechnung der Lage des Metacentrums. Damit ein Schiff eine große Standhaftigkeit des Gleichgewichtes auf dem Waſſer habe, muß die Figur desſelben ſo beſchaffen, und die Ladung dergeſtalt vertheilet ſeyn, daß für jede Schwankungsachſe das Metacentrum ſo hoch als möglich über den Schwerpunct des verdrängten Waſſers zu liegen kommt. §. 32. Wenn ein ſpecifiſch ſchwererer Körper im Waſſer mit einer Kraft gehalten wird, welche der Differenz der Gewichte des eingetauchten Körpers und des Waſſers gleich iſt; ſo wird das Sinken desſelben verhindert. Gewichtsverluſt eines eingetauchten feſten Körpers. §. 33. Noch einige Wirkungen des Auftriebes.

IV. Abſchnitt.

Hydroſtatiſche Abwägung und Ausmeſſung der Körper.

§. 34. Beſtimmung des eigenthümlichen Gewichtes eines gleichförmig dichten Körpers aus ſeinem kubiſchen Inhalte und Gewichte. §. 35. Was die ſpecifiſche Schwere eines Körpers ſey. §. 36. Aus der ſpecifiſchen Schwere eines Körpers ſein eigenthümliches Gewicht zu finden. §. 37. Einfluß der Temperatur auf die Beſtimmung der ſpecifiſchen Schwere der Körper. §. 38. Das eigenthümliche Gewicht des Waſſers wird mittelſt der Eintauchung und Abwägung durch folgende Proportion gefunden: Der bekannte kubiſche Inhalt des eingetauchten feſten Körpers verhält ſich zu I Kubikfuß oder Kubikzoll, wie das gefundene Gewicht des Waſſers unter demſelben Kubikinhalte (der Auftrieb) zu dem geſuchten Gewichte eines Kubikfußes oder Kubikzolles. Ein Wiener Kubik-Fuß Regenwaſſer wiegt 56⅝ Pfund Wien. Hand. Gew. §. 39. u. 40. Beſtimmung des Kubikinhaltes eines feſten Körpers mittelſt der Eintauchung und Abwägung im Waſſer. §. 41. Wie man den Gewichtsverluſt, Auftrieb, eines feſten Körpers in einer Flüſſigkeit bequem finden könne. §. 42. Beſtimmung des kubiſchen Inhaltes bey einem Waſſer haltenden Gefäße durch das bekannte eigenthümliche Gewicht des Waſſers. §. 43. Einrichtung der Wagen zum hydroſtatiſchen Gebrauche um die ſpecifiſchen Schweren verſchiedener Körper zu finden. §. 44. bis 47. Gebrauch der Senkwagen zur Beſtimmung der ſpecifiſchen Schweren verſchiedener Flüſſigkeiten. §. 48. Einrichtung einer Senkwage, um ſowohl das abſolute Gewicht, als auch die ſpecifiſche Schwere eines feſten Körpers zu finden. §. 49. Erklärung der Salz- oder Sohlwagen. §. 50. Auflöſung der Archimediſchen Aufgabe.

Zwey-

Zweytes Hauptſtück.

Grundlehre der Aeroſtatik.

I. Abſchnitt.

Grundlehre des Gleichgewichtes der Kräfte bey elaſtiſchen flüſſigen Maſſen.

§. 51. Was eine vollkommen elaſtiſche Flüſſigkeit ſey. §. 52. bis 55. Weſentliche Eigenſchaften der elaſtiſchen flüſſigen Maſſen ohne Schwere. Von der Druckhöhe der Elaſticität. §. 56. Das Verhältniß der Dichtigkeiten bey verſchiedentlich zuſammengedrückten elaſtiſchen Flüſſigkeiten muß durch Verſuche beſtimmet werden. §. 57 bis 59. Weſentliche Eigenſchaften der ſchweren elaſtiſchen Flüſſigkeiten. §. 60. Erfahrungsſätze über die uns umgebende atmoſphäriſche Luft; 1) über ihr Daſeyn; 2) Elaſticität; 3) Schwere derſelben; 4) Aenderung der Elaſticität durch Druck und Wärme u. m. d. gl. §. 61. Die auf Waſſerdruck reducirte Elaſticitäts-Höhe der atmoſphäriſchen Luft an der Erdfläche iſt beyläufig 32 Fuß. §. 62 bis 66. Vom Torricelliſchen Verſuche, wodurch verſchiedene Eigenſchaften der Luft erwieſen werden. §. 67. Die Dichtigkeit und Elaſticität der Luft bey einerley Wärme und Trockenheit iſt der zuſammendrückenden Kraft proportional. Verſuch, wodurch dieſer Satz erwieſen wird. Man nennt dieſen Satz das Mariottiſche Geſetz der Luft-Elaſticität. §. 68. Dieſes Geſetz findet auch bey der Verdünnung der Luft ſtatt. §. 69. Beſtimmung des Höhenunterſchiedes zweyer Oerter durch Barometer-Beobachtungen. Wenn die Erhöhungen in einer arithmetiſchen Progreſſion wachſen, ſo nehmen bey einerley Temperatur die Barometer-Höhen in einer geometriſchen Progreſſion ab. Die mittlere Barometer-Höhe am Meeres-Horizonte iſt beyläufig 345 Wien. Duod. Lin. und in einer Erhöhung von $25\frac{1}{4}$ Wien. Klaft. iſt ſie um 2 Lin. niedriger. Daraus abgeleitete Regeln und Formeln zur Beſtimmung des Höhenunterſchiedes der Oerter aus den dazu gehörigen mittleren Barometer-Höhen; wie auch zur Berechnung der Dichtigkeit der Luft für jede gegebene Erhöhung.

II. Abſchnitt.

Von der Luftpumpe, und von einigen andern aerometriſchen Werkzeugen.

§. 70. Kurze Beſchreibung und Einrichtung der Luftpumpe. Ihre weſentliche Theile ſind der Stiefel und Kolben, die Verbindungsröhre, der Teller, der Recipient, der Hahn oder Wirbel. §. 71. bis 74. Gebrauch der Luftpumpe, um die Luft zu verdünnen und zu verdich-

dichten. §. 75. Aus der Zahl der Auspumpungen läßt ſich beſtimmen, wie vielmahl die Luft im Recipienten verdünnet ſey. §. 76. Der Recipient wird nie gänzlich luftleer. §. 77. Aus der Zahl de Compreſſionen läßt ſich auch beſtimmen, wie ſtark die Luft im Recipienten verdichtet ſey. §. 78. u. 79. Erwähnung einiger Werkzeuge um den Grad der Verdünnung oder Verdichtung der Luft im Recipienten der Luftpumpe zu meſſen. §. 80. Aufzählung der merkwürdigern Verſuche die mit der Luftpumpe gemacht werden. §. 81. Die Luftpumpe iſt vorzüglich geeignet, die Schwere der Luft zu erweiſen. Man fand dadurch daß die atmoſphäriſche Luft nahe an der Meeresfläche 850 bis 900 mahl leichter ſey als Regenwaſſer; oder daß 1 Wien. Kub. Fuß der atmoſphäriſchen Luft 1 Unze des Wien. Hand. Gew. wiege. §. 82. Gewichtsverluſt der Körper in der Luft. §. 83. Die brennbare Luft hat bey einerley Elaſticität eine 10 bis 12 Mahl geringere Dichtigkeit, oder ſpecifiſche Schwere, als die atmoſphäriſche. Ein Luftballon mit derſelben angefüllet ſteigt in die Höhe, wenn ſein ganzes Gewicht geringer iſt, als das Gewicht der verdrängten atmoſphäriſchen Luft. §. 84. Beſchreibung und Gebrauch des Manometers, eines Inſtruments, welches die Veränderungen der Dichtigkeit der Luft anzeiget. §. 85. Aenderung des Gewichtes eines und desſelben Körpers an der gewöhnlichen Wage bey geänderter Dichtigkeit der atmoſphäriſchen Luft. §. 86. Von den gebräuchlichſten Thermometern; 1) von dem Reaumürſchen, 2) von dem Fahrenheitiſchen, 3) von dem Desliliſchen, 4) von dem ſchwediſchen, jetzt auch in Frankreich angenommenen, Queckſilber-Thermometer. Beſchreibung eines Thermometers, der ſeit der letzten Beobachtung in Merkmahl des ſtärkſten Grades der Wärme und Kälte zurückläßt.

Drittes Hauptſtück.

Grundlehre der Hydraulik.

I. Abſchnitt.

Ausfluß des Waſſers aus Oeffnungen im Boden, oder in der Wand eines Gefäßes.

A. Geſchwindigkeit des ausfließenden Waſſers.

§. 87. u. 88. Bedeutung der Worte Hydraulik; Boden und Wand eines Gefäßes; Druckhöhe, Waſſerſtand, Geſchwindigkeit, Geſchwindigkeitshöhe, Waſſermenge. §. 89. Die Geſchwindigkeit, mit der das Waſſer aus einer kleinen Oeffnung eines Gefäßes ausfließet, hat die Druckhöhe der Oeffnung zu ihrer Geſchwindigkeitshöhe. Verſuch dieſe

Grund-

Grundwahrheit der Hydraulik aus den allgemeinen Gründen der Mechanik abzuleiten. Verſchiedene aus dieſer Grundwahrheit fließende Folgerungen. §. 90. Warum die Höhe des Waſſerſtrahls bey Springbrunnen kleiner iſt, als die Druckhöhe. §. 91. Die Regeln zur Beſtimmung der Weite der Springöffnung und der Leitröhre für die möglich größte Höhe des Strahles eines Springbrunnes müſſen aus Erfahrungen abgeleitet werden. Einige hierzu dienliche Erfahrungsſätze. §. 92. Beſtimmung der Geſchwindigkeit, wenn das Waſſer nebſt der Schwere noch durch eine andere Kraft gepreſſet wird. §. 93. Von der Erſetzung des ausſtrömenden Waſſers durch einen Seitenzufluß, damit die Druckhöhe ungeändert verbleibet. §. 94. Die Bernoulliſche Grundformel der Hydraulik iſt unbrauchbar. Auch die vom Hr. Baader angegebene Grundformel der Hydraulik läßt ſich mit der Erfahrung nicht in Uebereinſtimmung bringen.

B. Waſſermenge in einer beſtimmten Zeit bey ungeänderter Druckhöhe.

§. 95. Formel zur Berechnung der Waſſermenge. Man muß den Querſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahles in Erwägung ziehen. §. 96. Durch Verſuche hat man gefunden, daß der Querſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahles zur Oeffnung ſich verhalte für eine Ausflußöffnung in einer dünnen Metallplatte wie 64 zu 100, bey einer kurzen Anſatzröhre aber wie 81 zu 100. §. 97. Die Waſſermengen in einerley Zeit aus gleichen Ausflußöffnungen bey verſchiedenen Druckhöhen verhalten ſich wie die Geſchwindigkeiten, oder wie die Quadrat-Wurzeln der Druckhöhen. §. 98. Die wirkliche Waſſermenge dividiret durch die hypothetiſche giebt die Verhältnißzahl, mit welcher man die Oeffnungsfläche multipliciren ſoll um den Querſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahles zu erhalten. §. 99. Auflöſung einiger practiſchen Aufgaben.

C. Ausleerung lothrecht ſtehender prismatiſcher Gefäße durch kleine Oeffnungen im Boden oder in der Seitenwand der Gefäße.

§. 100. Beſtimmung der Zeit, in welcher der Waſſerſpiegel um eine gegebene Tiefe ſinket; wie auch der Zeit der ganzen Ausleerung eines prismatiſchen Gefäßes. §. 101 u. 102. Anwendung dieſer Lehre auf die Berechnung der Zeit des Anfüllens und Ausleerens der Schleuſenkammern. §. 103. Beſtimmung der Waſſermenge in einer gegebenen Zeit aus einer rechtwinkeligen Oeffnung von beträchtlicher Größe in einer lothrechten Wand, wo die Geſchwindigkeiten in verſchiedenen Tiefen verſchieden ſind. §. 104. Langsdorfs Formel für die Waſſermenge bey einer kreisförmigen Ausfluß-Oeffnung. Bedeutung des Wortes, Waſſerzoll. §. 105 u. 106. Ausfluß aus oben offenen rechtwinkeligen Oeffnungen. Von der mittleren Geſchwindigkeit in ſolchen Oeffnungen. §. 107. Anwendung der vorgetragenen Lehren auf andere unelaſtiſche Flüſſigkeiten. §. 108. Von der Geſchwindigkeit, mit welcher die atmoſphäriſche Luft in einen luftleeren Raum einſtrömet. Dieſe Geſchwindigkeit iſt unverän-

der-

derlich, wenn der luftleere Raum unbegrenzt groß iſt; es möge die Luft wie immer verdichtet oder verdünnet ſeyn. Die Geſchwindigkeitshöhe einer ſolchen Ausſtrömungsgeſchwindigkeit iſt gleich der auf den Waſſerdruck reducirten Elaſticitäts-Höhe der Luft multipliciret mit der Verhältnißzahl der Waſſerdichtigkeit zur Luftdichtigkeit.

II. Abſchnitt.

Von dem Stoße des fließenden Waſſers gegen die Oberflächen der eingetauchten feſten Körper.

§. 109. Der ſenkrechte Stoß des fließenden Waſſers gegen eine eingetauchte und unbeweglich gehaltene feſte Ebene iſt dem Gewichte einer Waſſerſäule gleich, welche die geſtoßene Ebene zur Grundfläche, und die der Geſchwindigkeit des fließenden Waſſers zugehörige Höhe zu ihrer Länge hat. Verſuch dieſen Hauptſatz der Hydraulik aus den allgemeinen Gründen der Mechanik zu erweiſen. §. 110. Von dem ſenkrechten Waſſerſtoße gegen feſte Flächen von beträchtlicher Ausdehnung, wenn auch der Querſchnitt des fließenden Waſſers in Erwägung gezogen werden ſoll. §. 111. Einige Folgerungen aus der Grundformel des Waſſerſtoßes. Anwendung eben derſelben auf den Windſtoß. §. 112. Der ſchiefe Waſſerſtoß gegen eine feſte Ebene nach einer darauf ſenkrechten Richtung iſt gleich dem ſenkrechten Stoße gegen eine eben ſo große Fläche bey eben derſelben Geſchwindigkeit multipliciret mit dem quadrirten Sinus des Neigungswinkels der Stromrichtung gegen die angeſtoßene Fläche; nach der Richtung des Stromes aber iſt derſelbe gleich dem ſenkrechten Stoße gegen eine eben ſo große Fläche multipliciret mit dem kubirten Sinus des Neigungswinkels. Nach der auf den Strom ſenkrechten Richtung endlich iſt der ſchiefe Waſſerſtoß gleich dem ſenkrechten multipliciret mit dem quadrirten Sinus und mit dem einfachen Coſinus des Neigungswinkels der geſtoßenen Fläche gegen die Richtung des Stromes. §. 113. Beſtimmung der Lage der Stoßfläche, bey welcher der Stoß nach der auf den Strom ſenkrechten Richtung ein Größtes wird. Anwendung davon auf die fliegenden Brücken, und auf die Flügel der Windmühl-Räder. §. 114. Der ſchiefe Stoß nach der auf die Stoßfläche ſenkrechten Richtung iſt gleich dem ſenkrechten Waſſerſtoße gegen eine dem Querſchnitte des anſtoßenden Waſſerſtrahls gleiche Fläche multipliciret mit dem Sinus des Neigungswinkels der Stromrichtung gegen die Stoßfläche. Nach der Richtung des Stromes aber iſt der Stoß gegen eine ſchief geſtellte Ebene gleich dem ſenkrechten Stoße gegen eine dem Querſchnitte des anſtoßenden Waſſerſtrahles gleiche Fläche multipliciret mit dem quadrirten Sinus des Neigungswinkels der Stromrichtung gegen die Stoßfläche. §. 115. Vergleichung des Waſſerſtoßes gegen ein ſenkrechtes Parallelepipedum mit dem Stoße gegen ein anderes, welches an der Stoßſeite keilförmig zugeſchnitten iſt. §. 116. Beſtimmung

mung des Waſſerſtoßes gegen die Oberfläche eines abgekürzten Kegels nach der Richtung der Achſe. §. 117. Der Waſſerſtoß gegen eine Kugel nach der Richtung des Stromes iſt gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule, welche die größte Kreißfläche der Kugel zur Grundfläche, und die halbe Geſchwindigkeitshöhe des Stromes zu ihrer Länge hat. §. 118. Vergleichung des Waſſerſtoßes gegen die Grundfläche eines geraden Cylinders mit dem Stoße, wenn der Cylinder an ſeinem Ende, wo er dem Stoße ausgeſetzet iſt, kegelförmig ausläuft. §. 119. Wenn die Stoßfläche beträchtlich größer iſt, als der Querſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahles; ſo wird wegen Ausbreitung des letzten der Stoß ſehr merklich vermehret. Erfahrungsſatz zur Beſtimmung desſelben. §. 120. Vom abſoluten und relativen Waſſerſtoße; von der abſoluten und relativen Geſchwindigkeit. Beſtimmung des relativen Waſſerſtoßes. §. 121. Ein ſchwimmender Körper leidet in einem fließenden Strome nur ſo lange einen Stoß, bis ſeine Geſchwindigkeit der Geſchwindigkeit des Stromes gleich geworden iſt. §. 122. Ein Waſſerrad wird in Bewegung geſetzet, wenn der Waſſerſtoß größer iſt, als der ſämmtliche reducirte Widerſtand. Seine Umlaufsgeſchwindigkeit wächſt ſo lange, bis der relative Stoß dem ſämmtlichen reducirten Wiederſtande das Gleichgewicht hält; ſodann läuft es mit gleichförmiger Bewegung um. §. 123. Woraus der Effect einer Maſchine geſchätzet werde. §. 124. Bey der vortheilhafteſten Einrichtung einer Maſchine mit einem unterſchlächtigen Waſſerrade ſoll die Geſchwindigkeit der Radſchaufeln $\frac{1}{3}$ der abſoluten Geſchwindigkeit des anſtoßenden Waſſers ſeyn. Sodann iſt die relative Geſchwindigkeit $=\frac{2}{3}$ der abſoluten, und der relative Waſſerſtoß $=\frac{4}{9}$ des abſoluten. §. 125. Bey der Beſtimmung des Waſſerſtoßes gegen ein unterſchlächtiges Rad ſind nebſt der ſenkrecht getroffenen auch die ſchief geſtellten Radſchaufeln in Erwägung zu ziehen. §. 126. Der Waſſerſtoß gegen ein unterſchlächtiges Rad in einem geſchloſſenen Mühlgerinne iſt doppelt ſo groß, als in einem offenen Strome. §. 127. Die Richtigkeit der Formeln für den relativen Waßerſtoß $p = \frac{fq}{4g}(C-c)^2$ oder $p = \frac{fq}{2g}(C-c)^2$, wenn der abſolute Stoß durch $p = \frac{fqC^2}{4g}$ oder $p = \frac{fqC^2}{2g}$ richtig ausgedrucket iſt, wird erläutert. §. 128. H. Gerlach, Gerſtner, Langsdorf haben die angeführte Art den relativen Waſſerſtoß auszudrucken verworfen: der erſte ſetzet dafür $p = \frac{fq}{4g}(C^2-c^2)$, und die zwey andern $p = \frac{fq}{2g}(C^2-Cc)$. Warum man dieſe neuen Beſtimmungen des relativen Waſſerſtoßes nicht für richtig annehmen könne. §. 129. Von der Ausmeſſung der Geſchwindigkeit in einem Strome; 1) mittelſt einer ſchwimmenden Kugel, 2) mittelſt des Pitotiſchen Strom-Geſchwindigkeitsmeſſers, 3) mittelſt des Strom-Quadranten. Die Geſchwindigkeit iſt in verſchiedenen Tiefen verſchieden. §. 130. Wie die Waſſermenge zu beſtimmen ſey, welche ein Strom in einer gegebenen Zeit fortleitet. §. 131. Beſtimmung der Ge-

Geſchwindigkeit und Waſſermenge in einem regelmäßigen Fluße oder Canale, wie auch in einer geradlinigen Röhrenleitung. Auflöſung einiger dahin gehörigen practiſchen Aufgaben.

III. Abſchnitt.

Von einigen der gebräuchlichſten Maſchinen zur Hebung des Waſſers.

§. 132. Was man Waſſerkünſte nenne? was hydrauliſche Maſchinen? Eintheilung derſelben. §. 133 bis 137. Beſchreibung und Gebrauch verſchiedener Heber, als des gemeinen Hebers, des Berghebers, Stechhebers, Vexierbechers. Erklärung der intermittirenden Brunnen mittelſt der Lehre des Hebers. §. 138 u. 139. Beſchreibung des Herons-Balles, und Herons-Brunnens. §. 140. Die Waſſerpumpe iſt eine cylindriſche oder prismatiſche Röhre, worin das Waſſer mittelſt eines auf und niedergehenden Kolbens, und einiger Ventile in die Höhe getrieben wird. Die Ventile ſind entweder Klappen-Ventile oder Muſchel-Ventile. Beſchreibung des gewöhnlichen Kolben-Ventils. §. 141. Die Waſſerpumpen werden abgetheilet, in Hebewerke, Saugwerke, Druckwerke, und in vereinigte Saug- und Druckwerke. Die weſentlichen Theile eines Hebewerkes. §. 142. Weſentliche Theile eines Saugwerkes. Wie das Waſſer darin in die Höhe gebracht wird. §. 143. u. 144. Beſtimmung des Widerſtandes und der Waſſermenge bey einem Saugwerke. §. 145. Weſentliche Theile eines Druckwerkes. §. 146. Beſtimmung des Widerſtandes und der Waſſermenge bey einem Druckwerke. §. 147 u. 148. Widerſtand in vereinigten Saug- und Druckwerken. Von doppelten und zuſammengeſetzten Pumpwerken. §. 149. Begriff einer Feuer-Löſchſpritze. §. 150. Kurze Beſchreibung der in England ſo vielfältig gebrauchten Dampf- oder Feuermaſchinen. §. 151. Erwähnung der Archimediſchen Waſſerſchraube; und Bemerkungen über zuſammengeſetzte Maſchinen.

Viertes Hauptſtück.

Von der Bewegung der feſten Körper in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel.

I. Abſchnitt.

Geradlinige Bewegung der feſten Körper in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel mit Beſeitigung der Schwerkraft.

§. 152. Wenn ein feſter Körper in einer flüſſigen Maſſe ſich fortbeweget, ſo wird ſeine Geſchwindigkeit immer vermindert. §. 153. Wenn eine

eine feſte Fläche in einer flüſſigen Maſſe ſich fortbeweget, ſo leidet ſie einen eben ſo großen Stoß oder Druck, als wenn ſie ſelbſt unbeweglich gehalten würde, die flüſſige Maſſe aber mit eben derſelben Geſchwindigkeit gegen ſie ſich bewegete. §. 154 u. 155. Ausdruck des Widerſtandes gegen verſchiedene feſte Körper, insbeſondere gegen eine Kugel, nebſt einigen daraus abgeleiteten Folgerungen. Der Widerſtand, welchen eine Kugel bey ihrer Bewegung in einer flüſſigen Maſſe zu leiden hat, wird gleich geſetz dem Gewichte eines Cylinders von derſelben Flüſſigkeit, der einen größten Durchſchnitt der Kugel zur Grundfläche, und die halbe Geſchwindigkeitshöhe zu ſeiner Länge oder Höhe hat. §. 156. Wenn der feſte Körper in einer flüſſigen Maſſe ſich ſo ſchnell beweget, daß hinter demſelben ein leerer Raum entſteht; ſo hat die vordere Oberfläche des feſten Körpers nebſt dem hydrauliſchen Widerſtande auch noch einen hydroſtatiſchen Druck zu leiden. §. 157. Beſtimmung und analytiſche Ausführung der Bewegung einer feſten Kugel in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel, wenn die Schwerkraft und alle Hinderniſſe der Bewegung, außer dem Widerſtande der flüſſigen Maſſe vernachläſſiget werden. §. 158. Syſtematiſche Zuſammenſtellung der analytiſchen Formeln zur Ueberſicht der erwähnten Bewegung. §. 159. Wie man bey dieſer Bewegung auch den hydroſtatiſchen Druck in Erwägung ziehen könne, wenn hinter dem bewegten feſten Körper ein leerer Raum entſteht. §. 160. Gebrauch der vorigen Formeln, wenn der den Widerſtand vorſtellende Cylinder nicht die halbe, ſondern die Kfache Geſchwindigkeitshöhe zu ſeiner Länge hat.

II. Abſchnitt.

Lothrechte Bewegung der feſten Körper in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel.

§. 161. Bey der lothrechten Bewegung der feſten Körper in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel ſind drey Kräfte in Erwägung zu ziehen, nämlich die Schwere, der Auftrieb, und der Widerſtand der flüſſigen Maſſe. §. 162. Beſtimmung des lothrechten Sinkens oder Fallens einer feſten Kugel in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel. §. 163. Syſtematiſche Zuſammenſtellung der analytiſchen Formeln zur Ueberſicht der erwähnten Bewegung. §. 164. Vergleichung und Uebereinſtimmung dieſer Lehre mit der Erfahrung. §. 165. Beſtimmung der Bewegung einer lothrecht aufwärts geſchoſſenen Kugel. §. 166. Syſtematiſche Zuſammenſtellung der Formeln zur Ueberſicht dieſer Bewegung. §. 167. Fernere daraus fließende Folgen. §. 168 u. 169. Vergleichung des Steigens und Fallens durch einerley lothrechte Höhe.

III. Abſchnitt.

Krummlinige Bewegung geworfener oder geſchoſſener Körper in der widerſtehenden Luft.

§. 170. Beſtimmung der Gleichung für die Bahn, welche eine mit einer gegebenen anfänglichen Geſchwindigkeit unter einem gegebenen Elevations-Winkel abgeſchoſſene Kanon-Kugel in der widerſtehenden Luft beſchreibet. §. 171. Berechnung der größten Höhe der Bahn und der dazugehörigen Abſciſſe oder Schußweite des aufſteigenden Aſtes. §. 172. Formeln zur Berechnung der ganzen horizontalen Schußweite, der anfänglichen Geſchwindigkeit, und des Elevations-Winkels. §. 173. Eine andere Gleichung für die Bahn, durch eine etwas genauere Annäherung mit den daraus fließenden Formeln für die ganze horizontale Schußweite, für die anfängliche Geſchwindigkeit, und für den Elevations-Winkel. §. 174. Formel zur Beſtimmung der Länge des Bogens, welchen die Kugel vom Anfange ihrer Bewegung bis zu einem beliebigen Puncte ihrer Bahn beſchreibet. Dadurch kann man für jeden Elevations-Winkel die horizontale Schußweite und die Erhöhung des Scheitels der Bahn über den Horizont der Mündung des Geſchützes berechnen. §. 175. Anweiſung, wie eine ſolche Rechnung zu führen iſt. §. 176 u. 177. Analytiſcher Ausdruck der Tangential-Geſchwindigkeit und der Zeit für jeden Punct der Bahn. §. 178. Was für einen Gebrauch man von dieſem baliſtiſchen Probleme in der ausübenden Artillerie machen könne. §. 179. Gleichung für die Bahn der geworfenen Körper in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel, welche aus der Verbindung der horizontalen und verticalen Bewegung in eben demſelben Mittel abgeleitet wird. §. 180 bis 183. Berechnung der anfänglichen Geſchwindigkeit der geſchoſſenen Kugeln aus der gegebenen Länge des Geſchützrohres, aus der Ladung, und aus dem Durchmeſſer der Kugel. §. 184. Die Behauptung des Hrn. John Muller über die möglich größte Geſchwindigkeit der geſchoſſenen Kugeln in der widerſtehenden Luft iſt unrichtig. Der Grund des Irrthums wird aufgedecket. §. 185. Gebrauch der beygefügten baliſtiſchen Tafel zur Berechnung der Schußweiten in der widerſtehenden Luft.

Erſtes Hauptſtück.

Grundlehre der Hydroſtatik.

I. Abſchnitt.

Allgemeine Grundlehre des Gleichgewichtes der Kräfte bey flüſſigen Körpern.

---

§. 1.

Welche Körper flüſſig genannt werden, iſt leichter zu be- Fig.
greifen als zu erklären. Gewöhnlich pflegt man diejenigen Körper flüſſig zu nennen, bey denen ſich gar keine Theilchen angeben laſſen, die unter ſich ſo wie Theilchen feſter Körper zuſammen hängen.

Wenn daher auch zwey gleiche Kräfte nach gerade entgegen geſetzten Richtungen gegen zwey verſchiedene Elementar-Theilchen einer flüſſigen Maſſe wirken, ſo können ſie einander nicht im Gleichgewichte erhalten; denn die übrigen zwiſchenliegenden Theilchen, da ſie keinen Zuſammenhang haben, müſſen dem angebrachten Drucke ausweichen, und dadurch auch die anliegenden Theilchen aus ihren Stellen verdrängen, wenn ſolches nicht auf irgend eine Art, etwa durch eine feſte Röhre verhindert wird.

Auch iſt es leicht einzuſehen, daß die Elementar-Theilchen einer vollkommen flüſſigen Maſſe, weil ſie gar nicht

Fig. zuſammen hängen, von der geringſten Kraft an und neben einander beweget werden können, und daß in einer flüſſigen Maſſe, wenn ſolche in einem Gefäße vom feſten Umfange ſich eingeſchloſſen befindet, unter den Elementar-Theilchen eine innere Bewegung ſtatt finden könne, ohne daß dadurch die ganze Maſſe ſammt dem Gefäße mit in Bewegung kommt.

§. 2.

Eine flüſſige Maſſe wird unelaſtiſch genannt, wenn ſie ſich durch einen äußern Druck nicht in einen engern Raum zuſammen preſſen läßt, obgleich ihre Theilchen wegen der Flüſſigkeit dem Drucke nach allen Seiten auszuweichen ſtreben. Elaſtiſch aber heißt eine flüſſige Maſſe, wenn ſie zwar durch einen äußern Druck in einen engern Raum zuſammen gepreſſet werden kann; aber dabey auch deſto ſtärker entgegen drücket, und zugleich nach allen Seiten deſto heftiger ſich auszubreiten ſtrebet, je kleiner der Raum iſt, worin ſie ſchon zuſammen gepreſſet worden iſt. Dieſes Beſtreben ſich nach allen Seiten auszubreiten nennt man die Federkraft oder Elaſticität der flüſſigen Maſſe.

§. 3.

Die Wiſſenſchaft von den Geſetzen des Gleichgewichtes ſolcher Kräfte, die auf unelaſtiſche flüſſige Maſſen wirken, heißt die Hydroſtatik von dem griechiſchen Worte ὑδωρ Waſſer, ὑδρος naß, weil man das Waſſer wegen ſeiner unmerklichen Elaſticität, und wegen des äußerſt geringen Zuſammenhanges der Elementar-Theilchen für eine gänzlich unelaſtiſche flüſſige Maſſe anſehen kann; wo ſodann alles, was vom Gleichgewichte der Kräfte beym Waſſer erwieſen wird, auch auf die übrigen unelaſtiſchen flüſſigen Maſſen ſich anwenden läßt. Die Wiſſenſchaft aber von den Geſetzen des Gleichgewichtes ſolcher Kräfte, welche auf elaſtiſche flüſſige Maſſen wirken, führet den Nahmen Aeroſtatik oder auch Aerometrie von Aer Luft; weil die Luft ein elaſtiſches flüſſiges Weſen iſt, und alles, was vom Gleichgewichte der Kräfte bey der Luft erwieſen wird, auch auf andere elaſtiſche flüſſige Maſſen angewendet werden kann.

Die

Die Wiſſenſchaft von der Bewegung des Waſſers heißt Hydraulik, und von der Bewegung der Luft, Pnevmatik. Auch pflegt man denjenigen Theil der Mechanik, welcher von dem Gleichgewichte und von der Bewegung flüſſiger Maſſen überhaupt handelt, die Hydrodynamik zu nennen. Die unelaſtiſchen flüſſigen Maſſen pflegt man auch tropfbare Flüſſigkeiten, und die elaſtiſchen flüſſigen Maſſen luftförmige Flüſſigkeiten zu nennen. Fig.

1. Anmerkung. Die (§. 1.) angeführte Erklärung erſtrecket ſich zwar richtig auf alle Gattungen der flüſſigen Körper, ſowohl auf die unelaſtiſchen z. B. Waſſer, Oehl, Weingeiſt, Queckſilber, in Fluß gebrachte Metalle; als auch auf die elaſtiſchen flüſſigen Maſſen z. B. auf die verſchiedenen aus der Naturlehre bekannten Luftgattungen, Gaſe, auf die Dämpfe des kochenden Waſſers, u. ſ. w. Auch unterſcheidet dieſe Erklärung den feinſten Sand oder einen anderen Staub hinlänglich vom Waſſer, weil auch bey dem feinſten Staube die einzelnen Stäubchen für feſte Körper anzuſehen, und dergleichen Maſſen daher nicht zu den flüſſigen ſondern zu den ſo genannten körnigen zu zählen ſind. Nur iſt dieſe Erklärung äußerſt unfruchtbar, weil die übrigen Eigenſchaften der flüſſigen Körper ſich nicht füglich daraus ableiten laſſen. In der That ſagt auch die angeführte Erklärung nichts anders als, ein Körper heißt flüſſig, der nicht feſt iſt. Der berühmte Metaphyſiker Hr. Kant ſagt in ſeinen metaphyſiſchen Anfangsgründen der Dynamik: „Ein Körper heißt flüſſig, deſſen Theilchen, „bey einem noch ſo großen Zuſammenhange dennoch „ſehr leicht an einander beweglich ſind;" da man doch ſonſt zu ſagen pflegte, ein Körper heißt flüſſig, deſſen Theile gar nicht zuſammen hängen, und eben deßwegen ſehr leicht an einander beweglich ſind. Die brauchbareſte Erklärung eines flüſſigen Körper wäre diejenige, welche eine ſolche weſentliche Eigenſchaft enthielte, daß ſich alle übrige daraus ableiten ließen.

2. Anmerkung. Eine befriedigende Erklärung eines flüſſigen Körpers zu geben, iſt aus der Urſache äußerſt

 ſchwer,

Fig. ſchwer, weil uns die Elemente der Materie gänzlich unbekannt ſind. Indeſſen laſſen ſich alle diejenigen Erſcheinungen, die man bey flüſſigen Körpern einer mathematiſchen Berechnung unterwirft, aus der Vorſtellung ableiten, daß jede flüſſige Maſſe aus äußerſt glätten unendlich kleinen elaſtiſchen Kügelchen (Elementar-Kügelchen) beſtehe. Iſt nun die Elaſticität dieſer Elementar-Kügelchen ſo beſchaffen, daß dieſe bey einer noch ſo ſehr vermehrten Zuſammendrückung dennoch ihre Ausdehnung nicht merklich vermindern; ſo erſcheint eine ſolche flüſſige Maſſe beynahe unelaſtiſch, z. B. Waſſer, Queckſilber. Iſt aber die Elaſticität dieſer Elementar-Kügelchen von der Eigenſchaft, daß ſolche im Verhältniß der vermehrten Zuſammendrückung ihre Ausdehnung vermindern, und ſo auch ihre Ausdehnung im nähmlichen Verhältniſſe vermehren, wie die Zuſammendrückung geringer wird; ſo erſcheint eine ſolche flüſſige Maſſe als elaſtiſch, z. B. die gewöhnliche Luft. Die Elementar-Kügelchen der flüſſigen Maſſen könnten auch beynahe vollkommen hart, aber dabey mit den Abſtoßungskräften nach dem bekannten Boskovichiſchen Syſteme (3. Thl. §. 59.) dergeſtalt verſehen ſeyn, daß daraus entweder eine oder die andere angeführte Beſchaffenheit der Elaſticität entſtände. Wenn man ſich nun eine flüſſige Maſſe aus dergleichen elaſtiſchen Elementar-Kügelchen zuſammengeſetzet vorſtellet; ſo wird das Beſtreben der Elementar-Theilchen bey einer angebrachten Kraft nach allen Seiten auszuweichen, und die leichte Beweglichkeit derſelben an einander ganz begreiflich.

In H. A. Schönbergers Grundriß einer Naturwiſſenſchaft 1797. Seite 97. heißt es:

„Flüſſige Materie iſt eine ſolche, deren einerleyartigen Beſtandtheile in einer unbeſtimmten Lage in Berührung unter ſich, aber nicht in Verbindung (wechſelſeitigem Eingreifen) ſtehen.

„Daraus folgt:

1) „Da die Beſtandtheile der flüſſigen Materie ſelbſt „in keiner Verbindung ſind; ſo kann einer gewiſſen Menge „ſolcher nicht anderſt ein beſtimmter Ort im Raume ange-

„wie-

„wieſen werden, als daß man dieſelbe an ſolchem Orte Fig.
„durch feſte Materie einſchließt, und ſo die Theile in ein „Ganzes zuſammen hält: wie bey Flüſſen und Seen das „Waſſer von deren Ufer, und wie die flüſſige Materie über„haupt durch Gefäße an willkürlichen Orten im Raume zu„ſammen gehalten wird.

2) „Noch weniger widerſtehen ſie, aus der nähmli„chen Urſache, einer von außen auf ſie gerichteten Tren„nung.

3) „Und eben folglich ſuchen die Theile der flüſſigen „Materie, indem eine andere Materie in ihren Raum ein„zudringen beſtrebet iſt, nach allen Richtungen Auswege, „und widerſtehen im Ganzen nur mit ihrer Schwerkraft.

4) „Da derſelben Beſtandtheile keine beſtimmte Lage „unter ſich haben: ſo verändern ſie, bey dem Eindringen „oder der Berührung einer andern Materie, nur ihre un„gebundene Lage, und erzeugen keine Reibung; die aber „nothwendig bey der feſten (ſpröden) Materie und eben „aus der Urſache erzeugt wird, da ihre Beſtandtheile eine „beſtimmte gebundene Lage unter ſich haben, und eben da„mit widerſtehen.“

"Die Erklärung der flüſſigen Materie von J. Kant in „ſeinen Methaphiſiſchen Anfangsgründen der Naturwiſſen„ſchaft, Seite 47 Original-Auflage. — Ein Körper heißt „flüſſig, deſſen Theile bey einem noch ſo große Zuſammen„hange dennoch ſehr leicht an einander beweglich ſind — „iſt ſo unrichtig als jede andere; da erſtens Zuſammen„hang auch Verbindung heißen kann; und zweytens, da „ſie keine innere Karakteriſtik der flüſſigen Materie, ſon„dern nur ein äußeres Merkmal der Beweglichkeit ihrer „Theile angiebt.“

§. 4.

Um die Geſetze des Gleichgewichtes bey flüſſigen Körpern eben ſo aus ihren erſten Quellen herzuleiten, wie ſolches bey feſten geſchehen iſt, muß man ſich anfangs die flüſſigen Körper, mit Beſeitigung der Schwerkraft vorſtellen. Alle Theilchen einer ſchweren flüſſigen Maſſe ſind der

Fig. der Wirkung mechaniſcher Kräfte ſchon ausgeſetzet. Wenn man daher wiſſen will, was die Wirkung der Schwere für einen Erfolg hat; ſo muß man ſich zuerſt vorſtellen, was mit flüſſigen Körpern vorgehen würde, wenn ſie von der Schwerkraft frey wären, ſonſt aber eine oder mehrere bewegende Kräfte nach angenommenen Geſetzen auf dieſelben wirketen.

§. 5.

1 Die Haupteigenſchaft der flüſſigen Körper, wodurch ſich ſolche von feſten unterſcheiden, beſteht darin, daß ein angebrachter Druck gegen irgend einen Theil einer in einem unbeweglichen Gefäße gänzlich eingeſchloſſenen flüſſigen Maſſe nach allen Richtungen in ſeiner ganzen Stärke fortgepflanzet wird. Wenn man ſich z. B. vorſtellet, daß ein Gefäß vom feſten Umfange, wovon ABEGH Fig. 1. ein Durchſchnitt ſeyn mag, mit einer unſchweren flüſſigen Maſſe angefüllet ſey, und daß gegen eine Seitenfläche AB eine Kraft $= P$ (etwa mittelſt eines genau paſſenden und frey beweglichen Stämpels) nach einer darauf ſenkrechten Richtung drucke; ſo leidet der Theil AB der Oberfläche der eingeſchloſſenen Flüſſigkeit einen unmittelbaren Druck $=$ P. Dieſer Druck pflanzet ſich nun vermöge der vollkommenen Beweglichkeit der Elementar-Theilchen des Flüſſigen durch die ganze eingeſchloſſene flüſſige Maſſe nach allen Richtungen in ſeiner ganzen Stärke dergeſtalt fort, daß 1) jeder dem AB gleich großer ebener Theil der Wände des Gefäßes nach einer darauf ſenkrechten Richtung von innen nach außen den nähmlichen Druck $= P$ leidet, 2) auch jeder dem AB gleich großer Theil der Oberfläche eines in dem eingeſchloſſenen Flüſſigen ſchwebenden feſten Körpers nach einer darauf ſenkrechten Richtung eben ſo ſtark gedrücket wird, und endlich 3) daß auch jede der Stämpelfläche AB gleich große, und inner dem eingeſchloſſenen Flüſſigen in was immer für einer Lage ſchwebende Ebene beyderſeits nach ſenkrechten Richtungen den nähmlichen Druck $= P$ leidet; oder welches einerley iſt, daß bey dem unmittelbaren Drucke P gegen AB auch die auf zwey dergleichen ebenen Flächen vertheilten und

nach

nach der ganzen Ausdehnung der Flächen zuſammen grän- Fig.
zenden Elementar - Theilchen des eingeſchloſſenen Flüſſigen 1
mit der nähmlichen Kraft = *P* gegen einander drücken.

Um dieſe angeführte Haupteigenſchaft leichter einzuſehen kann folgende Erläuterung dienen. Bey dem Drucke *P* auf die Fläche AB gedenke man in einer Seitenfläche des Gefäßes z. B. in EF ein Stück pq eben ſo groß als AB, nach ſeinem Umfange von den übrigen ringsherum anliegenden Theilen der nähmlichen Seitenfläche getrennet; ſo würde wegen des angebrachten Druckes *P* gegen AB die eingeſchloſſene flüſſige Maſſe den losgetrennten Theil pq hinausdrücken, und ſodann durch die Oeffnung auszuſtrömen anfangen, wofern nicht eine Kraft *R*, die etwa mittelſt eines Stämpels ſenkrecht auf pq drücket, ſolches verhinderte; und es iſt offenbar, daß in einem ſolchen Falle, um den Theil pq an ſeiner Stelle unverrückt zu erhalten, *R* = *P* ſeyn müſſe, vorausgeſetzt, daß die eingeſchloſſene Maſſe vollkommen flüſſig iſt; ſo daß nun bey dieſen Umſtänden pq durch den fortgepflanzten Druck von *P* hinauswärts ſo ſtark, als von *R* hineinwärts gedrückt wird, auf eben die Art, als wenn die Kraft *P* unmittelbar den Theil pq hinausdrückte. Stellet man ſich ferner vor, daß der Theil pq wieder mit der Seitenfläche EF hinlänglich feſt vereiniget werde; ſo vertritt die Feſtigkeit von pq die Stelle der äußeren Kraft *R*, und der innere fortgepflanzte Druck gegen pq verbleibet, wie chevor = *P*. Dieſer Schluß gilt von jedem eben ſo großen Theile einer ebenen Fläche bey dem eingeſchloſſenen Flüſſigen, wo man eine ſolche Fläche auch annehmen mag. Wenn man nähmlich ſich auch einen mitten im eingeſchloſſenen Flüſſigen ſchwebenden feſten Körper vorſtellet, z B. ein Parallelepipedum, wo jede der zwey entgegengeſetzten Seitenflächen ab, dc der Stämpelfläche AB gleich iſt; ſo entſteht aus dem unmittelbaren Drucke *P* auf AB auch gegen jede der zwey Seitenflächen ab, dc nach darauf ſenkrechten Richtungen ein eben ſo großer fortgepflanzter Druck; und ſowohl ab als dc würde bey einem hohlen Parallelepipedum wirklich hineingedrücket und der innere leere Raum

von

Fig. 1 von dem hineinſtrömenden Flüſſigen angefüllet werden, wenn ſolches die Feſtigkeit von ab, dc nicht verhinderte. Der auf ab und dc fortgepflanzte Druck verbleibet immer der nähmliche, es möge der Abſtand ad oder bc der zwey Flächen ab, dc noch ſo klein ſeyn, oder auch gänzlich verſchwinden; wo ſodann die zwey Flächen ab, dc auf einander fallen, und eine einzige ebene Fläche vorſtellen. Der auf eine Fläche AB unmittelbar angebrachte Druck *P* pflanzet ſich daher durch die ganze im Gefäße eingeſchloſſene flüſſige Maſſe allenthalben gegen jede eben ſo große Fläche, wenn man ſolche wo immer auch mitten in der flüſſigen Maſſe annehmen mag, nach einer darauf ſenkrechten Richtung mit gleicher Stärke fort.

§. 6.

In allen Fällen, wenn eine flüſſige Maſſe in einem feſten Gefäße von was immer für einer Geſtalt eingeſchloſſen iſt, und wenn alsdann von außenher an einer Stelle, wo das Gefäß eine Oeffnung hat, gegen die anliegende Fläche des Flüſſigen ein darüber gleichförmig vertheilter Druck preſſet, muß man dieſen unmittelbaren Druck, welchen die anliegende Fläche leidet, von dem nach allen Seiten durch die ganze flüſſige Maſſe fortgepflanzten Drucke unterſcheiden. Die ebene Fläche, auf welche der unmittelbare Druck preſſet, heißt die **Fläche des unmittelbaren Druckes**; und jede ebene Fläche, welche einen fortgepflanzten Druck leidet, wird die **Fläche des fortgepflanzten Druckes** genannt. Wie es eigentlich zugehe, daß bey eingeſchloſſenen flüſſigen Maſſen aus einem unmittelbaren Drucke ein fortgepflanzter Druck nach allen Richtungen entſtehe, ſollte die Naturlehre beſtimmen. Der Grund davon iſt in der Elementar-Kraft der Materie (3. Th. §. 59.) zu ſuchen; man kann ſich nähmlich vorſtellen, daß durch den unmittelbaren Druck die Abſtoßungskraft der Elementar-Theilchen der flüſſigen Maſſe in Wirkſamkeit geſetzet werde. Es wird übrigens hier und im folgenden alle Mahl vorausgeſetzet, daß die Gefäße feſtgehalten werden, damit ſie

we-

wegen der verſchiedenen von außen auf ihre feſten Oberflächen wirkenden Kräfte nicht weichen können. Fig. 1

§. 7.

Bey flüſſigen in Gefäßen eingeſchloſſenen Maſſen ohne Schwere verhält ſich der fortgepflanzte Druck gegen was immer für eine darin angenommene ebene Fläche zum unmittelbaren Drucke gegen irgend eine andere Fläche, wie die Fläche des fortgepflanzten zur Fläche des unmittelbaren Druckes. Z. B. der gegen GH fortgepflanzte Druck, oder eine demſelben das Gleichgewicht haltende Kraft Q verhält ſich zu P, wie GH zu AB.

Um dieſe Wahrheit einzuſehen, ſey erſtlich die Fläche GH $n$mahl ſo groß als die Fläche AB des unmittelbaren Druckes, nähmlich $GH = n.\ AB$; ſo leidet jeder der Fläche AB gleich große Theil von GH (vermöge §. 5.) einen dem unmittelbaren Drucke gleich großen fortgepflanzten Druck $= P$; nun aber beſteht vermöge der Vorausſetzung GH aus n dergleichen Theilen AB; folglich iſt der ſämmtliche von P auf die ganze Fläche GH fortgepflanzte Druck, oder eine mit demſelben im Gleichgewichte ſtehende Kraft Q auch $n$mahl ſo groß als P, nähmlich $Q = n.\ P$ und $n = \frac{Q}{P}$; da nun auch $GH = n.\ AB$ und $n = \frac{GH}{AB}$: ſo iſt auch $\frac{Q}{P} = \frac{GH}{AB}$; und folglich $Q : P = GH : AB$. Zweytens ſey das Verhältniß irgend einer ebenen Fläche des fortgepflanzten Druckes z. B. ad zu AB wie immer beſchaffen; ſo gedenke man dieſe Fläche ad dergeſtalt erweitert, bis ſolche $k$mahl ſo groß wird, als die Fläche AB des unmittelbaren Druckes: ſo wird der darauf wirkende fortgepflanzte Druck, vermöge des Vorhergehenden, $= kP$ ſeyn. Da dieſer fortgepflanzte Druck kP über die erweiterte Fläche gleichförmig vertheilet iſt; ſo leidet der Theil ad dieſer erweiterten Fläche nur einen ſolchen Theil $= p$ des geſammten darauf wirkenden fortgepflanzten Druckes $k.\ P$, das p zu

$k.\ P$,

Fig. 1 $k. P$, ſich verhalte, wie die Fläche ad zur ganzen erweiterten Fläche $k.$ AB, nähmlich $p : k.P =$ ad : $k.$ AB; folglich iſt auch in dieſem Falle $p : P =$ ad : AB. Der fortgepflanzte Druck verhält ſich demnach gegen u. ſ. w.

Hieraus folget:

1) Aus dem gegebenen unmittelbaren Drucke und aus deſſen Fläche läßt ſich der fortgepflanzte Druck gegen jede gegebene feſte Fläche berechnen; z. B. gegen GH iſt der fortgepflanzte Druck $= \frac{GH}{AB} . P$, und gegen EF iſt ſolcher $= \frac{EF}{AB} . P$. Auf dieſe Art läßt ſich auch der fortgepflanzte Druck gegen jeden ſo kleinen Theil einer krummen Oberfläche, welchen man ohne merklichen Fehler als eine ebene Fläche anſehen kann, berechnen.

2) Wäre GH eine offene Stelle des Gefäßes, ſo würde ein unmittelbarer Druck P gegen AB ohne Zweifel die flüſſige Maſſe zur Oeffnung GH hinaustreiben. Um dieſes zu hindern, müßte auch gegen GH von außenher ein Druck Q preſſen, ſo daß $Q = \frac{GH}{AB} . P$ wäre. Q würde alsdann mit P im Gleichgewichte ſeyn. In einem ſolchen Falle, wo gegen AB der Druck P, und gegen GH der Druck $Q = \frac{GH}{AB} . P$ zugleich von außen darauf preſſet, könnte vielleicht jemand vermuthen, daß ſodann jede andere Seitenfläche des Gefäßes einen zweyfachen fortgepflanzten Druck zu leiden habe, ſo daß z. B. der gegen DE fortgepflanzte Druck $= \frac{DE}{AB} . P + \frac{DE}{GH} . Q = \frac{DE}{AB} . P + \frac{DE}{GH} . \frac{GH}{AB} . P = \frac{DE}{AB} . 2P$ wäre: nähmlich $\frac{DE}{AB} . P$ wegen des unmittelbaren Druckes P gegen AB, und $\frac{DE}{GH} . Q$ wegen Q gegen GH. Allein das wäre eine irrige Vermuthung; denn

denn wenn man P für den unmittelbaren Druck annimmt, Fig.
ſo hat Q nichts anders zu thun als die Stelle der feſten 1
Seitenfläche GH des Gefäßes zu vertreten, nähmlich den gegen GH forgepflanzten Druck aufzuhalten; und ſo ſtellt auch P an AB nichts anders vor. Nur alsdann, wenn Q gegen GH einen größeren Druck als $\frac{GH}{AB}.P$, oder wenn P gegen AB einen größern Druck als $\frac{AB}{GH}.Q$ ausübet, leidet DE auch einen größern fortgepflanzten Druck; in welchem erſten Falle aber, um das Gleichgewicht zu erhalten, auch P dergeſtalt vergrößert werden muß, daß $P = \frac{AB}{GH}.Q$; und im zweyten Q ſo vergrößert werden muß, daß $Q = \frac{GH}{AB}.P$ bleibt: wo nun wieder im Stande des Gleichgewichtes der gegen DE fortgepflanzte Druck, oder eine demſelben das Gleichgewicht haltende Kraft $= \frac{DE}{AB}.P$ oder $= \frac{DE}{GH}.Q$ ſeyn müßte für die Ausdrücke P und Q in ihren erhöheten Werthen genommen.

3) Der fortgepflanzte Druck verbleibet unverändert, wenn man den unmittelbaren Druck P und im nähmlichen Verhältniſſe die Fläche AB (gegen welche jener preſſet) vermehret, oder vermindert; wenn nähmlich mP aus P und zugleich m. AB aus AB wird, ſo iſt ſodann gegen GH der fortgepflanzte Druck $= \frac{GH}{m.AB}.mP = \frac{GH}{AB}.P$ eben ſo groß als bey dem unmittelbaren Drucke P gegen AB.

Anmerkung. Das bisher angeführte gilt ſowohl von elaſtiſchen als auch von unelaſtiſchen flüſſigen Maſſen ohne die Schwere in Betracht zu ziehen, mit dem einzigen Unterſchiede, daß eine elaſtiſche flüſſige Maſſe, wenn ſolche in einem Gefäße eingeſchloſſen, und einem unmittelbaren Drucke P ausgeſetzet iſt, dadurch in einen ſo kleinen Raum

Fig. 1 zuſammen gepreſſet wird, bis der von der Elaſticität der Elementar-Theilchen herrührende innere Druck gegen die Fläche AB dem äußeren Drucke *P* gleich iſt. Wird nun der äußere Druck *P* gegen die nähmliche Fläche AB vermindert; ſo wird vermöge des überwiegenden inneren Elaſticitätsdruckes die Stämpelfläche AB herausgeſchoben, die eingeſchloſſene flüſſige Maſſe in einen größeren Raum ausgebreitet, und dadurch auch der fortgepflanzte Druck gegen jede Seitenfläche vermindert. Iſt hingegen die eingeſchloſſene flüſſige Maſſe gänzlich unelaſtiſch; ſo nimmt ſolche immer einen und denſelben Raum ein, es möge der auf AB angebrachte Druck wie immer beſchaffen ſeyn. Auch folget die unelaſtiſche flüſſige Maſſe dem Stämpel nicht nach, wenn er zurückgezogen wird, und der fortgepflanzte Druck höret ſodann gänzlich auf. Der Erfolg bey elaſtiſchen flüſſigen Maſſen iſt nähmlich eben ſo beſchaffen, als wenn jedes Elementar-Theilchen der Materie einer ſolchen Maſſe mit einer nach allen Richtungen ausſtrömenden Abſtoßungskraft verſehen wäre, welche bey jeden zwey angränzenden Elementar-Theilchen mit deren Entfernungen im umgekehrten Verhältniſſe ſteht. Dadurch kann eine elaſtiſche flüſſige Maſſe mittelſt eines vermehrten äußeren Druckes in einen engern Raum gebracht werden, und muß bey vermindertem Drucke ſich gleich wieder in einen größern Raum ausbreiten. Auch bey unelaſtiſchen flüſſigen Maſſen kann man den fortgepflanzten Druck durch eine Abſtoßungskraft der Elementar-Theilchen rechtfertigen, welche aber von der Beſchaffenheit ſeyn müßte, daß ſie bey dem gewöhnlichen Abſtande der Elementar-Theilchen noch gänzlich unthätig wäre, bey der geringſten Verminderung der Entfernungen hingegen außerordentlich ſtark wirkete. Auf dieſe Art könnte eine ſolche unelaſtiſche flüſſige Maſſe durch einen äußern Druck nicht leicht in einen engern Raum gebracht werden. Nur dann, wenn ſolche durch einen außerordentlich großen Druck zuſammen gepreſſet würde, könnte man eine ſehr geringe Verminderung des Raumes wahrnehmen. Das Waſſer hat eine ſolche Beſchaffenheit. Man hielt ſolches immer für gänzlich unelaſtiſch, bis man endlich

lich in den neuern Zeiten durch einige Verſuche dargethan Fig.
hat, daß es ſich durch einen äußerſt großen Druck dennoch in einen um etwas ſehr weniges kleinern Raum bringen laſſe, und nach aufgehobener Zuſammendrückung wieder den vorigen Raum einnehme. Ob aber die wahrgenommene Elaſticität des Waſſers bey einer außerordentlichen Zuſammendrückung nicht von der im Waſſer immer befindlichen Luft herrühre, und alſo in Rückſicht auf das Waſſer ſelbſt nicht bloß ſcheinbar ſey, iſt dann doch eine noch nicht klar ausgemachte Sache.

II. Abſchnitt.

Allgemeine Grundlehre des Gleichgewichtes des ſchweren Waſſers in Gefäſſen.

§. 8.

Wenn ſchweres Waſſer (worunter man auch jede andere unelaſtiſche flüſſige Maſſe von gleichförmiger Dichtigkeit verſtehen kann) in einem unbeweglichen Gefäße eingeſchloſſen iſt; ſo verurſachet vermöge der Schwerkraft jedes Elementar-Theilchen gegen das zunächſt unten gelegene nach der lothrechten Richtung einen unmittelbaren Druck, der dem Gewichte eines ſolchen Elementar-Theilchens gleich iſt. Dieſer unmittelbare Druck eines jeden Elementar-Theilchens gegen das zu nächſt unten gelegene pflanzet ſich nicht nur allein nach der fortgeſetzten, ſondern (vermöge §. 5.) auch ſeitwärts nach jeder anderen Richtung fort. Die Richtungen der Schwere in nicht gar zu großen Entfernungen ſind (vermöge 3 Th. §. 6.) für parallel anzuſehen; es können daher

auch

Fig. auch um ſo mehr in nicht gar zu weiten Gefäßen die Richtungen des von der Schwerkraft entſtehenden unmittelbaren Druckes der Elementar - Theilchen des Waſſers gegen die zu nächſt unten gelegenen für parallel angenommen werden.

§. 9.

Diejenige Menge der Elementar-Theilchen des Waſſers in einem Gefäße, welche man über eine horizontale Durchſchnittsebene deſſelben neben einander verbreitet gedenket, kann man eine horizontale Waſſerſchichte nennen. Da nun in einem Gefäße jedes Elementar-Theilchen des Waſſers gegen das zu nächſt unten gelegene einen unmittelbaren Druck ausübet, der dem Gewichte deſſelben gleich iſt (§. 8.); ſo iſt es offenbar, daß auch jede horizontale Waſſerſchichte gegen die zunächſt unten gelegene einen unmittelbaren Druck nach einer lothrechten Richtung ausübet, der dem Gewichte einer ſolchen Waſſerſchichte gleich iſt; und daß dieſer unmittelbare Druck ſich nicht nur allein nach der fortgeſetzten, ſondern auch ſeitwärts nach jeder anderen Richtung fortpflanzet. Daher iſt jede horizontale Schichte außer dem unmittelbaren Drucke der zu nächſt darauf liegenden Schichte auch noch einem fortgepflanzten Drucke aller übrigen darüber liegenden Waſſerſchichten ausgeſetzet; und zwar ſo, daß der fortgepflanzte Druck eine ſolche horizontale Waſſerſchichte (vermöge §. 5.) von beyden Seiten gleich ſtark preſſet, nähmlich eben ſo ſtark von oben nach unten als von unten nach oben. Auch jede andere in was immer für einer Lage angenommene Waſſerſchichte wird von dem fortgepflanzten Drucke von beyden Seiten nach ſenkrechten Richtungen gepreſſet. Wie groß der fortgepflanzte Druck gegen verſchiedene Waſſerſchichten in verſchiedenen wie immer ſchiefgeneigten Lagen ſey, wird weiter unten gezeigt werden. So viel kann man indeſſen doch einſehen, daß im Stande des Gleichgewichtes eines im Gefäße eingeſchloſſenen ſchweren Waſſers was immer für ein Elementar-Theilchen deſſelben von allen Seiten her einen gleich großen fortgepflanzten Druck zu leiden habe; wie groß hingegen dieſer fortgepflanz-

pflanzte Druck gegen ein Elementar-Theilchen des Waſſers in verſchiedenen Stellen des Gefäßes ſey, wird ebenfalls weiter unten zu erſehen ſeyn. Fig.

§. 10.

Wenn ein unbewegliches oberwärts offenes Gefäß bis zu einer horizontalen Ebene mit ſchwerem Waſſer angefüllet wird; ſo wird letzteres in dieſer Lage ruhig und im Gleichgewichte ſeyn, vorausgeſetzt, daß außer der Schwere ſonſt keine Kraft darauf wirke. Iſt hingegen bey einem oberwärts offenen oder auch geſchloſſenen, aber nicht ganz angefüllten Gefäße die oberſte uneingeſchloſſene Fläche des Waſſers nicht horizontal; ſo kann ſolches in dieſer Lage nicht ruhig ſeyn.

Es ſey das Gefäß APQB Fig. 2. bis zur horizontalen Ebene AB mit ſchwerem Waſſer angefüllet, und man gedenke die ganze Waſſermaſſe von AB angefangen bis zur unterſten Stelle des Gefäßes in lauter horizontale Waſſerſchichten zertheilet; ſo iſt die unterſte Schichte PQ gewiß im Gleichgewichte, weil der fortgepflanzte Druck, dem ſie wegen aller darüber liegenden Waſſerſchichten ausgeſetzet iſt, von unten hinauf von dem Boden, und ſeitwärts von den Wänden des Gefäßes aufgehalten wird. Aber auch jede andere höher liegende horizontale Waſſerſchichte EF iſt im Gleichgewichte, weil ſolche von dem fortgepflanzten Drucke aller darüber liegenden Waſſerſchichten eben ſo ſtark hinauf als hinunter gepreſſet wird, und wegen der feſten Wände des Gefäßes auch ſeitwärts nicht zerfließen kann. Endlich muß auch die oberſte horizontale Waſſerſchichte AB im Gleichgewichte ſeyn; weil ſie von oben herab weiter keinen Druck zu leiden hat, und der unmittelbare Druck eines jeden Elementar-Theilchens derſelben gegen das zu nächſt unten gelegene Elementar-Theilchen einen eben ſo großen fortgepflanzten Druck auch nach der entgegen geſetzten Richtung von unten hinauf verurſachet, wodurch das Sinken gänzlich verhindert, und das Ausweichen nach der Seite, wenne wirklich eine Urſache dazu vorhanden wäre, durch die Wände des Gefäßes aufgehalten wird. Bey dem angeführ

ten

Fig. 2 ten Umſtande iſt daher die ganze ſchwere Waſſermaſſe im Gleichgewichte.

Iſt hingegen die Oberfläche CGD nicht horizontal, ſondern in G über die horizontale Ebene CD erhöhet; ſo iſt jede oberhalb CD angenommene horizontale Waſſerſchichte MN einem fortgepflanzten Drucke aller übrigen darüber liegenden Waſſerſchichten ausgeſetzet, welcher (nach §. 5.) die Theilchen M und N auch ſeitwärts heraustreibet. Auch treibet der fortgepflanzte Druck MGN die Theilchen an MC gegen A, und an ND gegen B heraus. Daher kann die erhöhte Waſſermaſſe, da ſie ſeitwärts nicht geſtützet iſt, in dieſer Lage nicht in Ruhe verbleiben, ſondern muß zerfließen, wenn man auch zugibt, daß das übrige unterhalb CD befindliche Waſſer im Gleichgewichte ſey. Auch iſt es ſchon aus der Lehre der Bewegung ſchwerer Körper auf der ſchiefen Ebene erſichtlich, daß die auf den Abhängen einer erhöheten Oberfläche des ſchweren Waſſers befindlichen Elementar-Theilchen M und N nicht ruhen können.

1. **Anmerkung.** Der angeführte Satz wird auch durch die Erfahrung beſtättiget; man findet nähmlich allenthalben die Oberfläche des ſtillſtehenden Waſſers horizontal, wenn außer der Schwere keine andere Kraft darauf wirket. Jedoch leidet dieſelbe zuweilen auch eine geringe Ausnahme; es kann ſich nähmlich fügen, daß die Elementar-Theilchen der flüſſigen Maſſe von den Wänden des Gefäßes entweder angezogen, oder auch abgeſtoßen werden, wodurch ſich an der Oberfläche der ruhenden flüſſigen Maſſe vorzüglich in Gefäßen von geringer Weite im erſten Falle eine merkliche Vertiefung, und im zweyten eine Erhöhung gegen die Mitte zeiget. Allein dergleichen Kräfte werden hier außer Acht gelaſſen.

2. **Anmerkung.** Auf dem großen Weltmeere, und überhaupt bey allen ſchon ſo weit ausgebreiteten Gewäſſern, daß man die Richtungen der Schwere nicht mehr durchaus für parallel anſehen kann, iſt im Stande des Gleichgewichtes die Oberfläche des Waſſers nicht mehr eine ebene Fläche; ſondern ſolche müßte vielmehr eine Strecke

von einer Kugelfläche ſeyn, wenn die Richtungen der Fig.
Schwere allenthalben genau im Mittelpuncte der Erdkugel
zuſammenträfen. Es iſt nähmlich leicht einzuſehen, daß
eine flüſſige Maſſe, deren Theilchen alle gegen einen und
denſelben Mittelpunct ſchwer ſind, nur damahls im
Gleichgewichte ſeyn kann, wenn deren äußerſte Oberfläche
um den nähmlichen Mittelpunct eine Kugelgeſtalt annimmt.
In einem ſolchen Falle leiden die Theilchen der flüſſigen
Maſſe an der äußerſten Oberfläche gar keinen Druck; an
jeder anderen in der flüſſigen Maſſe nach belieben angenom-
menen concentriſchen Kugelfläche hingegen leidet jedes Theil-
chen des Flüſſigen von allen Seiten her einen gleich gro-
ßen fortgepflanzten Druck; und daher iſt in einem ſolchen
Falle alles im Gleichgewichte. Würde aber an irgend ei-
ner Stelle ein Theil der flüſſigen Maſſe über die Kugelflä-
che hervorragen; ſo müßte dieſer Theil ſo wie MGN in
Fig. 2. ringsherum zerfließen, und das Gleichgewicht könn- 2
te nicht beſtehen. Die Umdrehung der Erde um ihre Achſe
verurſachet, daß die Oberfläche des Weltmeeres auch keine
vollkommene Kugelfläche ſeyn kann; ſondern ſolche iſt die
Oberfläche eines abgeplatteten Elliptoides, wo der Durch-
meſſer des Aequators größer iſt, als die Achſe von einem
Pole zum andern; und zwar nach den neuern Beſtimmun-
gen beyläufig in dem Verhältniſſe von 334 zu 335. Wenn
nähmlich der feſte Kern der Erdkugel auch wirklich
eine vollkommene Kugelgeſtalt von gleichförmiger Dich-
tigkeit hätte; ſo könnte bey deren täglichen Umdre-
hung um ihre Achſe dennoch die Richtung der Schwer-
kraft nicht allenthalben gegen den Mittelpunct gerich-
tet ſeyn (3. Th. §. 200.). Da nun ſchweres Waſſer im
Stande des Gleichgewichtes jederzeit eine ſolche Oberfläche
annimmt, daß die Richtung der Schwerkraft allenthalben
darauf ſenkrecht iſt; ſo iſt es offenbar, daß bey der Um-
drehung einer ſolchen Erdkugel wenn man dieſelbe mit Waſ-
ſer übergoſſen in Erwägung zieht, die Oberfläche des ru-
henden Waſſers gar nicht kugelförmig ſeyn kann. Da über
dieſes bey der Umdrehung einer ſolchen feſten Kugel die

Fig. Schwerkraft von beyden Polen gegen den Aequator abnimmt; ſo muß ein darüber verbreitetes Waſſer von gleichförmiger Dichtigkeit im Stande des Gleichgewichtes eine ſolche Lage annehmen, daß die Waſſerhöhe unter dem Aequator größer iſt, als unter den Polen. Wenn der angenommene genau kugelförmige Kern der Erde nicht hinlänglich feſt, ſondern anfänglich etwas weich wäre; ſo müßte auch dieſer Kern wegen der täglichen Umdrehung allmählich die Geſtalt eines abgeplatteten Ellipsoides annehmen. Wenn man die Erde als eine durchaus flüſſige Maſſe von gleichförmiger Dichtigkeit anſieht; dabey das in 3. Th. 4. Aufl. §. 58. am Ende I. Seite 64. berührte Geſetz der Schwerkraft inner der Erdkugel für bekannt annimmt, und ferner die Verminderung der Schwerkraft wegen der ſo genannten Fliehkraft (nach 3. Th. §. 200.) gehörig in Erwägung zieht: ſo läßt ſich das Verhältniß zwiſchen der Halbachſe und dem Halbmeſſer des Aequators berechnen: und zwar ſo, daß man zwey Waſſerſäulen in einer vereinigten Röhre vom Polle bis zum Mittelpuncte und von da bis zum Umkreiſe des Aequators in Erwägung zieht, und die Länge einer jeden Waſſerſäule ſo zu beſtimmen ſucht, daß ſolche bey der Umdrehung einander im Gleichgewichte erhalten; oder daß ſodann eine im Mittelpuncte angenommene Waſſerſchichte von beyden Seiten einem gleich großen fortgepflanzten Drucke ausgeſetzt ſey. Dieſe Rechnung auszuführen würde uns zu weit von unſerem Ziele ableiten; indeſſen können die fähigern Leſer ihre eigenen Kräfte daran verſuchen. Auch wäre noch zu beſtimmen, ob bey der Umdrehung eines ſolchen flüſſigen Ellipsoides im Stande des Gleichgewichtes die Schwerkraft vom Pole gegen den Aequator noch abnehme; ob nicht vielleicht ſodann die Schwerkraft auf der Oberfläche eines ſolchen Ellipsoides allenthalben gleich groß ſeyn könnte? daß man daher aus der beobachteten Abnahme der Schwere von den Polen gegen den Aequator keineswegs eine ellipsoidiſche, ſondern vielmehr eine kugelförmige Geſtalt, und zugleich die Umdrehung der Erde folgern dürfte. Aber ſodann wäre bey der Beobach-

tung

tung der Polhöhen, und in anderen Fällen die Ablenkung der Schwerkraft vom Mittelpuncte der Erde bey deren kugelförmiger Geſtalt gehörig in Erwägung zu ziehen. Die weitere Ausführung hiervon gehört zur vollſtändigen Naturlehre. Man vergleiche hiermit meine mathematiſche Betrachtung über eine ſich um eine unbewegliche Achſe gleichförmig drehende feſte Kugel. Erfurt bey Beyer 1798. Man findet in dieſer Abhandlung Seite 155. die Bemerkung, daß eine feſte ſchwere Kugel von der beyläufigen Größe und Dichtigkeit unſers Erdkörpers bey einer ſolchen Umdrehungsbewegung, die bey unſerer Erde ſtatt findet, uns bey Meſſungen der Meridiangrade in verſchiedenen geographiſchen Breiten als ein abgeplattetes Ellipſoid von dem Abplattungsverhältniß 414 zu 415 erſcheinen müßte, wenn ſie ſchon eine vollkommene Kugelgeſtalt hätte. Man vergleiche auch Bode aſtron. Jahrb. für 1802 Seite 251.

§. 11.

Die horizontale Bodenfläche eines ſenkrechten prismatiſchen oder cylindriſchen mit ſchwerem Waſſer angefüllten Gefäßes leidet im Stande des Gleichgewichtes einen Druck, der dem Gewichte der ganzen darüberſtehenden Waſſermaſſe gleich iſt.

Denn die Bodenfläche wird in einem ſolchen Falle eben ſo gedrücket, als wenn das Gefäß mit einer feſten Maſſe angefüllet wäre, die mit dem Waſſer einerley ſpecifiſches Gewicht hat, und an den Seiten des Gefäßes allenthalben genau anſchließt, aber doch in demſelben ohne Reibung frey beweglich iſt; mit dem einzigen Unterſchiede, daß im letzten Falle bey der feſten Maſſe die Seitenflächen des Gefäßes gar keinen Druck zu leiden haben; im erſten Falle hingegen, wo das Gefäß mit ſchwerem Waſſer angefüllet iſt, wirket auch gegen die Seitenflächen des Gefäßes nach darauf ſenkrechten Richtungen ein fortgepflanzter Druck, der ſich in der Folge wird beſtimmen laſſen.

Den angeführten Satz kann man auch auf folgende Art erweiſen.

Fig. 3 Es ſey das Lothrecht ſtehende prismatiſche Gefäß ABCD Fig. 3. bis zur Höhe AB mit ſchwerem Waſſer angefüllet, ſo iſt (vermöge §. 10.) im Stande des Gleichgewichtes die Oberfläche deſſelben AB horizontal, und mit der Bodenfläche CD parallel. Man gedenke durch horizontale Durchſchnitts-Ebenen die ganze Waſſermaſſe in Waſſerſchichten zertheilet; ſo wird jede ſolche Durchſchnitts-Ebene der Bodenfläche DC gleich ſeyn; und jede Waſſerſchichte leidet (vermöge §. 9.) von der zu nächſt darauf liegenden einen unmittelbaren Druck, der ihrem Gewichte gleich iſt. Dieſer unmittelbare Druck jeder oberen Schichte gegen die zu nächſt unten liegende pflanzet ſich (vermöge §. 5.) gegen die Bodenfläche in ſeiner ganzen Stärke fort; es hat daher die Bodenfläche einen Druck zu leiden, der dem Gewichte aller darüber liegenden Waſſerſchichten, das iſt, der ganzen darüber befindlichen Waſſermaſſe gleich iſt.

Anmerkung. Wenn man die Oberfläche AB mit einer feſten Fläche zuſchließt, ohne ſolche mit einer Kraft von oben nach unten zu preſſen; ſo iſt wohl offenbar, daß eine ſolche Fläche alsdann auch von unten nach oben keinen Druck zu leiden hat. Es könnte aber doch vielleicht jemand auf den Einfall gerathen aus der Fortpflanzung des Druckes erweiſen zu wollen, daß in einem ſolchen Zuſtande die Fläche AB einen eben ſo großen Druck von unten nach oben zu leiden habe als DC von oben nach unten; es könnte nähmlich jemand meinen, daß der Druck, welchen die unter einer horizontalen Ebene EF befindliche Waſſermaſſe gegen die Bodenfläche DC ausübet, ſich auch durch die oberhalb EF befindliche Waſſermaſſe gegen den Deckel AB fortpflanze. Allein das kann gar nicht ſeyn; denn die unterhalb eines beliebigen horizontalen Querſchnittes EF befindliche Waſſermaſſe für ſich allein betrachtet verurſachet gar keinen Druck gegen EF hinaufwärts, ſondern iſt (vermöge §. 10) im Gleichgewichte. Alsdann, wenn man die ſchwere Waſſermaſſe AEFB auf EF ſetzet, wirket zwar gegen EF hinaufwärts ein fortgepflanzter Druck, weil die unter EF befindliche Waſſermaſſe wegen der Abſtoßungskraft

kraft der Elementar-Theilchen den darauf wirkenden Druck Fig.
gleichſam wieder zurück gibt; dieſer gegen EF hinaufwärts 3
zurückgegebene Druck aber iſt immer mit dem Drucke der darauf ruhenden Waſſermaſſe im Gleichgewichte. Weil aber über AB kein Waſſer mehr iſt, auch ſonſt keine Kraft von oben darauf preſſet, ſo kann dieſe Fläche AB auch keinen Druck zurück geben; und ſie leidet daher von unten hinauf keinen fortgepflanzten Druck. Der Erfolg iſt immer ſo, als wenn EFBA eine feſte Maſſe wäre, die dieſen Raum genau ausfüllet, in demſelben frey beweglich iſt, und mit dem Waſſer einerley ſpecifiſches Gewicht hat.

§. 12.

Diejenige Menge des ſchweren Waſſers, welche den körperlichen Inhalt eines ſenkrechten prismatiſchen Gefäßes ausfüllet, kann man eine Waſſerſäule nennen.

1) Das Gewicht einer ſolchen Waſſerſäule wie ABCD wird leicht gefunden, wenn die Grundfläche DC $= f$ im Quadratinhalte, ihre Höhe AD $= a$ im Längenmaße, und nebſt dem auch das eigenthümliche Gewicht des Waſſers bekannt iſt. Setzet man nähmlich den körperlichen Inhalt der Waſſermaſſe $= v$, das eigenthümliche Gewicht des Waſſers $= q$, und das geſuchte Gewicht der ganzen Waſſerſäule $= p$; ſo iſt

I. $v = af$; II. $p = qv$; III. $p = afq$.

2) Ein Wiener Kubikfuß Regenwaſſer wiegt ſehr nahe $56\frac{3}{8}$ Wiener-Pfunde; daraus ergibt ſich das Gewicht eines Duodecimal-Kubikzolles ſehr nahe $= 1\frac{1}{24}$ Loth; es iſt daher beym Regenwaſſer entweder $q = 56{,}375$ Pfd. oder $q = 1\frac{1}{24} = \frac{100}{96}$ Loth, nach dem der körperliche Inhalt in Kubikfußen oder Kubikzollen ausgedruckt iſt. Queckſilber iſt beynahe 14mahl dichter als Waſſer; daher iſt beym Queckſilber entweder $q = 789\frac{1}{4}$ Pfd., oder $q = 14\frac{7}{12}$ Loth, nachdem entweder der Kubikfuß oder der Kubikzoll für die Einheit angenommen wird. Ein Pariſer-Kubikfuß Regenwaſſer wiegt ſehr nahe 70 Pariſer Pfunde, und ein Rheinländiſcher Kubikfuß ſehr nahe 66 Köllner-Pfunde. Beym gewöhnlichen reinen Fluß- und Brunnenwaſſer kann

man

Fig. man in der Ausübung das Gewicht eines Wien. Kub. Fußes $56\frac{1}{2}$ Pfunde des Wien. Handelsgewichtes ſetzen.

§. 13.

Wenn eine ebene Fläche einen gleichförmig darüber vertheilten Druck leidet, deſſen Richtung auf der Ebene ſenkrecht iſt; ſo läßt ſich eine Waſſerſäule angeben, welche eine eben ſo große horizontale Bodenfläche eines lothrecht ſtehenden prismatiſchen Gefäßes eben ſo ſtark drücken würde. Die Höhe einer ſolchen Waſſerſäule kann man die Höhe des Druckes nennen.

1) Wenn daher eine ebene Fläche f einen darauf ſenkrechten und gleichförmig vertheilten Druck $= p$ leidet; ſo kann man $p = afq$ ſetzen, wo q das eigenthümliche Gewicht des Waſſers, und a die Höhe des Druckes bedeutet. Daraus folgt $a = \frac{p}{fq}$; nähmlich die Höhe des Druckes wird gefunden, wenn man den Druck durch das Product aus der Fläche des Druckes in das eigenthümliche Gewicht des Waſſers dividiret.

2) Im §. 7. iſt der fortgepflanzte Druck ſo beſchaffen, daß die Höhe des Druckes allenthalben gleich groß iſt.

4\. Denn da $a = \frac{p}{fq}$, ſo iſt gegen AB die Höhe des Druckes $= \frac{P}{AB.\,q}$; und da gegen was immer für eine Fläche DE der fortgepflanzte Druck $= \frac{DE}{AB}.\,P$, ſo iſt die Höhe dieſes fortgepflanzten Druckes $= \frac{DE}{AB}.\,P : DE.\,q = \frac{P}{AB.\,q}$ eben ſo groß als gegen AB; und eben ſo groß iſt die Druckhöhe auch gegen jede andere Fläche z. B. gegen EF.

§. 14.

Wenn ein Gefäß von was immer für einer Geſtalt, welches einen ebenen horizontalen Boden hat, mit ſchwerem Waſſer angefüllet, und alles in Ruhe iſt;

iſt; ſo leidet der Boden einen fortgepflanzten Druck, der dem Gewichte einer Waſſerſäule gleich iſt, welche die Bodenfläche des Gefäßes zur Grundfläche, und die ſenkrechte Höhe des darüber befindlichen Waſſers zur Höhe hat; das iſt: Die Höhe des gegen die Bodenfläche fortgepflanzten Druckes iſt ſo groß, als der Abſtand der oberſten Fläche des Waſſers von der horizontalen Bodenfläche. Fig.

Es ſey das Gefäß CABHGD Fig. 4. bis zur horizontalen Ebene CD mit ſchwerem Waſſer angefüllet, und die lothrechte Höhe CP $= a$ in unendlich viele gleiche Theile getheilet, oder eigentlich nur in ſoviel gleiche Theile, als Elementar-Theilchen des Waſſers in der Höhe CP lothrecht über einander liegen können. Jedes dergleichen Theilchen der Höhe ſey $= e$; durch alle dieſe Theilungspuncte gedenke man horizontale Ebenen geführet: ſo wird dadurch die ganze Waſſermaſſe in ihre horizontale Waſſerſchichten zertheilet. Die Grundflächen dieſer horizontalen Waſſerſchichten von oben herabgezählet bezeichne man mit A, B, C, D, E. . .; ſo ſind die körperlichen Inhalte der Waſſerſchichten in der nähmlichen Ordnung $= A.e$, $B.e$, $C.e$. . . und ihre Gewichte $= Aeq$, Beq, Ceq, Deq, . . . wenn q das eigenthümliche Gewicht des Waſſers bedeutet. Nun verurſachet jede Waſſerſchichte gegen die zunächſt unten liegende einen unmittelbaren Druck, der ihrem Gewichte gleich iſt; und jeder ſolche unmittelbare Druck pflanzet ſich (vermöge §. 7.) dergeſtalt gegen die Bodenfläche fort, daß der von jeder Schichte gegen die Bodenfläche AB $= f$ fortgepflanzte Druck $= efq$ iſt; weil der fortgepflanzte Druck x zum unmittelbaren ſich verhält, wie die Bodenfläche zur Fläche des unmittelbaren Druckes, nähmlich $x : Aeq = f : A$; und eben ſo auch $x : Beq = f : B$, u. ſ. w. Es iſt daher der von ſämmtlichen Waſſerſchichten gegen die Bodenfläche fortgepflanzte Druck $= efq + efq + efq \ldots = (e + e + e + e + e + \ldots) fq = afq$. 4

Man kann den angeführten Satz auch kurz ſo erweiſen. Ein unbeſtimmtes Stück CQ der Höhe CP von C ge-

Fig. 4 gezählet ſey $= x$, die horizontale Durchſchnitts-Ebene des Waſſers in dieſer Höhe aber ſey $= y$; ſo iſt die horizontale Waſſerſchichte über dieſer Ebene $= y\mathrm{d}x$, und ihr Gewicht $= qy\mathrm{d}x$ als ein unmittelbarer Druck dem y ausgeſetzet iſt, weil man das Differenziale $\mathrm{d}x$ für die Dicke der Waſſerſchichte anſehen kann. Daraus entſteht (nach §. 7.) ein fortgepflanzter Druck $\mathrm{d}p$ gegen AB$=f$ von der Beſchaffenheit, daß $\mathrm{d}p : qy\mathrm{d}x = f : y$ ſich verhält; folglich iſt $\mathrm{d}p = qf\mathrm{d}x$, und $\int \mathrm{d}p = \int qf\mathrm{d}x$, nähmlich $p = qfx$; wo indeſſen p nur den Druck bedeutet, welchen die ſämmtliche über y befindliche Waſſermaſſe gegen die Bodenfläche f fortpflanzet. Setzet man nun $x =$ CP $= a$; ſo iſt der von der ſämmtlichen Waſſermaſſe CABHGD gegen die Bodenfläche AB fortgepflanzte Druck $p = afq$ ſo groß als das Gewicht einer Waſſerſäule, deren Grundfläche AB und Höhe CP iſt.

Weitere Folgen:

1) Es iſt daher auch in jeder andern Tiefe CQ gegen eine horizontale Durchſchnitts Ebene EF des Waſſers, oder gegen eine horizontale Waſſerſchichte die Höhe des ſämmtlichen Druckes von oben nach unten $=$ CQ; und weil der Druck vermöge der Flüſſigkeit des darunter befindlichen Waſſers ſich nach allen Richtungen fortpflanzet: ſo iſt auch die Höhe des Druckes gegen EF von unten nach oben $=$ CQ. Aus der nähmlichen Urſache iſt auch die Höhe des Druckes, welchen ein Elementar-Theilchen des Waſſers an einer beſtimmten Stelle des Gefäßes von allen Seiten her leidet, eben ſo groß, als die Vertiefung eines ſolchen Elementar-Theilchens unter der Oberfläche des Waſſers. Eben darum iſt auch die Höhe des Druckes gegen ein Elementar-Theilchen des feſten Umfanges des Gefäßes nach einer darauf ſenkrechten Richtung gleich dem Abſtande eines ſolchen Elementar-Theilchens von der horizontalen Ebene, welche über die Oberfläche des Waſſers weg ſtreichet; z. B. die Höhe des Druckes gegen das Elementar-Theilchen E iſt $=$ CQ; und die Höhe des

Dru-

Druckes gegen das Elementar-Theilchen K nach einer auf BH ſenkrechten Richtung iſt CM oder KS: Nähmlich der Druck, welchen ein ebenes Elementar-Theilchen K des Gefäßes nach einer darauf ſenkrechten Richtung leidet, iſt gleich dem Gewichte eines Waſſerſäulchens von der Grundfläche K und Höhe KS. Fig. 4

2) Iſt nun GH eine horizontale Fläche des Gefäßes; ſo leidet ſie daher von der Waſſermaſſe CEFD einen fortgepflanzten Druck von unten nach oben, der dem Gewichte einer Waſſerſäule von der Grundfläche GH und Höhe CQ gleich iſt. Es iſt aus dieſem zu erſehen, daß eine geringe Menge Waſſers CEFD einen ſehr großen Druck verurſachen könne; indem es hier nur auf die Fläche des Druckes und auf die Höhe der darüber befindlichen Waſſermaſſe, nicht aber auf ihre Menge ankommt. Daraus läßt ſich auch die Wirkung des ſo genannten anatomiſchen Hebers erſehen. Wenn nähmlich über GH ſtatt der feſten Fläche eine Thierhaut geſpannet, und auf ſolche eine ſehr ſchwere Laſt gelegt wird; ſo kann letztere durch eine ſehr geringe Menge Waſſers in die Höhe gehoben werden, weil die da in die Höhe drückende Kraft gegen die Fläche GH nicht von der Menge des Waſſers in der Röhre EFDC ſondern bloß allein von der lothrechten Höhe QC und von der Größe der Fläche GH abhänget. Auch iſt aus dem Angeführten zu erſehen, warum man beym Baue der Schifffahrtsſchleuſen ſo ſorgfältig verhindern muß, daß kein Waſſer von außen unter den Schleuſenboden gelange. Denn wenn das vor der Schleuſenkammer in einer beträchtlichen Höhe aufgehaltene Waſſer durch irgend eine verborgene noch ſo kleine Oeffnung unter den Schleuſenboden hineindringen, und nirgends weiter abfließen kann; ſo wird der Schleuſenboden im Verhältniß ſeiner großen Ausdehnung und Vertiefung unter dem höchſten Waſſerſpiegel mit einer erſtaunlichen Gewalt in die Höhe gepreſſet, und kann dadurch zu Grunde gehen.

§. 15.

Fig.
4

§. 15.

Der Druck eines in einem Gefäße ruhenden Waſſers gegen was immer für eine ebene Fläche des Umfanges nach einer darauf ſenkrechten Richtung iſt gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule, welche dieſe Fläche zur Grundfläche, und den Abſtand ihres Schwerpunctes von der Oberfläche des Waſſers zur Höhe hat.

Wenn die Fläche AB oder GH Fig. 4. horizontal iſt, ſo iſt der Abſtand ihres Schwerpunctes CP bey AB, und und CQ bey GH; und folglich der angeführte Satz vermöge des Vorhergehenden richtig. Iſt aber irgend eine ebene Fläche z. B. BH nicht horizontal, ſo gedenke man eine ſolche Fläche BH $= f$ in ihre Elementar-Theilchen A, B, C, D, E .... zertheilet (man kann ſich vorſtellen, daß die Fläche BH durch unendlich nahe neben einander gezogene horizontal Linien in die Elementar-Streife $= A, B, C, D, E$.... zertheilet ſey); die zugehörigen Abſtände dieſer Elementar-Theilchen von der horizontalen Ebene CS bezeichne man mit A', B', C', D'.... Der Abſtand KS des Schwerpunctes K der Fläche BH von CS ſey $= a$, und das eigenthümliche Gewicht des Waſſers $= q$; ſo iſt (vermöge §. 14. n. 1.) der geſammte gegen BH fortgepflanzte Druck

$$p = A.A'.q + B.B'.q + C.C'.q + D.D'.q + \ldots$$
$$= q\,(A.A' + B.B' + C.C' + D.D' + \ldots)$$

und vermög (3. Th. §. 132) iſt

$$a = \frac{A.A' + B.B' + C.C' + D.D' + \ldots}{A + B + C + D + \ldots}$$
$$= \frac{A.A' + B.B' + C.C' + \ldots}{f}$$

nähmlich $A.A' + B.B' + C.C' + \ldots\ldots = af$; folglich auch $p = q.\,af$.

Fernere Folge: Fig. 4

1) Wenn die Fläche GH horizontal iſt, ſo iſt der fortgepflanzte Druck auf derſelben gleichförmig vertheilet. Man kann daher den ſämmtlichen fortgepflanzten Druck, welchen eine ſolche Fläche leidet, im Schwerpuncte der gedrückten Fläche vereiniget gedenken. Wenn nähmlich die feſte Fläche GH an ihrem Umfange von dem Gefäße getrennet, und dafür in ihrem Schwerpuncte von außen herein mit einer Kraft gepreſſet würde, die dem darauf fortgepflanzten Drucke gleich iſt; ſo wird dieſelbe dadurch an ihrer Stelle im Gleichgewichte erhalten. Iſt aber eine ebene Fläche BH des Gefäßes nicht horizontal; ſo iſt auch der fortgepflanzte Druck auf derſelben nicht gleichförmig vertheilet; die Elementar-Theilchen einer ſolchen Fläche werden nähmlich deſto ſtärker gedrücket, je tiefer ſie unter der Oberfläche des Waſſers liegen. Der Punct, in welchem man den fortgepflanzten Druck vereiniget denken kann, oder am welchen, wenn er geſtützet wird, die Preſſungen gegen die Elementar-Theilchen der feſten Fläche einander im Gleichgewichte erhalten (der Mittelpuncte des Druckes), iſt daher in einem ſolchen Falle nicht der Schwerpunct der ebenen Fläche BH; ſondern dieſer muß auf folgende Art beſtimmet werden.

§. 16.

Der Punct, in welchem man den fortgepflanzten Druck des Waſſers gegen eine nicht horizontale ebene Fläche eines Gefäßes vereiniget denken kann, iſt der Schwingungspunct eben dieſer Fläche, in Hinſicht auf die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie der nöthigen Falles erweiterten Oberfläche des ruhenden Waſſers mit der im erforderlichen Falle ebenfalls erweiterten Ebene der gedrückten Fläche als Schwingungsachſe betrachtet: es iſt nähmlich der Punct des vereinigten Druckes von der erwähnten Durchſchnittslinie, eben ſo weit entfernet, als der Schwingungspunct der nähmlichen Fläche von eben dieſer Durchſchnittslinie, wenn dieſe für eine Schwingungsachſe angeſehen wird.

Um

Fig. 4 Um dieſe Wahrheit einzuſehen, gedenke man die gedrückte ebene Fläche BH ſo erweitert, bis ſie mit der ebenfalls erweiterten ebenen Oberfläche des Waſſers CD in T zuſammenſtoße: wo der Punct T die vordere Anſicht der erwähnten Durchſchnittslinie in der Figur anzeigt, ſo wie die ebenfalls erwähnten Flächen BH und CD in ihrer vorderen Anſicht als gerade Linien erſcheinen. Die Abſtände der Elementar-Theilchen $A, B, C, D, E, \ldots$ der Fläche BH von der Oberfläche des Waſſers ſetze man wie vorher $= A', B', C', D', E', \ldots$ die Abſtände eben dieſer Elementar-Theilchen aber von der durch T gehenden Durchſchnittslinie $= a, b, c, d, e, \ldots$ und den Winkel STB $= m$, das eigenthümliche Gewicht des Waſſers aber $= q$; ſo iſt (vermöge 3. Th. §. 132.) der Abſtand des Punctes für den vereinigten Druck von der Durchſchnittslinie T gezählet.

$$= \frac{A.A'.q.a + B.B'.q.b + C.C'.q.c + \ldots}{A.A'.q + B.B'.q + C.C'.q + \ldots}$$

weil der Punct des vereinigten Druckes nichts anders iſt als der gemeinſchaftliche Schwerpunct der verſchiedenen Preſſungen gegen die Elementar-Theilchen $A, B, C, D, E, \ldots$ auf der ebenen Fläche BH. Es iſt aber $A' = a.\sin m$, $B' = b.\sin m$, $C' = c.\sin m$, $D' = d.\sin m$; .... folglich iſt auch eben dieſer Abſtand des vereinigten Druckes $= \frac{A.a^2 + B.b^2 + C.c^2 + \ldots}{A.a + B.b + C.c + \ldots}$.

Nun aber iſt (vermöge 3. Th. §. 212.) der Abſtand des Schwingungspunctes der Fläche BH in Hinſicht auf die durch T gehende Durchſchnittslinie als Schwingungsachſe betrachtet auch $= \frac{A.a^2 + B.b^2 + C.c^2 + \ldots}{A.a + B.b + C.c + \ldots}$.

Folglich iſt der Abſtand des Punctes für den vereinigten Druck von der Durchſchnittslinie T eben ſo groß als der Abſtand des Schwingungspunctes der Fläche BH von eben dieſer Durchſchnittslinie T als Schwingungsachſe betrachtet.

Hier-

Hieraus abgeleitete Folgen:

1) Wenn nun die Gerade BH durch den Schwerpunct K auf die durch T gehende Durchſchnittslinie ſenkrecht gezogen die gedrückte Fläche BH in zwey gleiche und ähnlich liegende Theile theilet; ſo liegt der Punct des vereinigten Druckes gewiß in dieſer Geraden BH; weil in einem ſolchen Falle die Schwerpuncte der Preſſungen des Waſſers gegen die horizontal liegenden Elementar-Streife der Fläche BH alle in einer ſolchen Linie liegen. Trifft aber dieſes nicht zu; ſo muß man den Abſtand des vereinigten Druckes noch beſonders von dieſer Geraden BH, oder von einer Parallelen derſelben in der Ebene BH berechnen. Fig. 4

2) Iſt daher BH ein Rechteck, deſſen Länge BH $= m$, die horizontal liegende Breite aber $= n$, und HT $= l$ iſt; ſo iſt der Abſtand des Punctes für den vereinigten Druck

von T gerechnet $= \dfrac{\frac{1}{3}m^2 + ml + l^2}{\frac{1}{2}m + l}$, und folglich vom

Schwerpuncte K gegen B gezählet $= \dfrac{\frac{1}{6}m^2}{m + 2l}$; weil (vermöge 3. Th. §. 207.) das Drehungsmoment eines ſolchen Rechteckes in Hinſicht auf die durch T gehende Durchſchnittslinie $= mn\ (\frac{1}{3}m^2 + ml + l^2)$, und das ſtatiſche Moment in Hinſicht auf eben dieſe Linie $= mn\ (\frac{1}{2}m + l)$ iſt.

3) Wäre BH eine Kreisfläche, deren Halbmeſſer $= a$, und der Abſtand des Mittelpunctes K von T $= b$ iſt; ſo iſt das Drehungsmoment einer ſolchen Kreisfläche in Hinſicht auf einen horizontalen Durchmeſſer $= a^2\pi.\frac{1}{4}a^2$, und folglich (vermöge 3. Th. §. 207. V.) in Hinſicht auf die durch T gehende Durchſchnittslinie $= a^2\pi.\ (\frac{1}{4}a^2 + b^2)$; das ſtatiſche Moment aber in Hinſicht auf eben dieſe Durchſchnittslinie iſt $= a^2\pi.b$; folglich iſt der Abſtand des Punctes für den vereinigten Druck von T gezählet $= \dfrac{a^2\pi(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}{a^2\pi.b}$

$= b + \dfrac{\frac{1}{4}a^2}{b}$, und daher vom Mittelpuncte gegen B gezählet

=

Fig. $=\frac{\frac{1}{4}a^2}{b}$. Wäre nun in dieſem Falle HT $= 0$, alſo $b = a$,
ſo wäre der Abſtand des Punctes für den vereinigten Druck vom Mittelpuncte des Kreiſes gegen den unterſten Punct deſſelben $= \frac{1}{4}a$.

4) Es ſey ABCD eine verticale Seitenwand eines
5 Gefäßes Fig. 5, welches bis AB parallel zu CD mit ſchwerem Waſſer angefüllet iſt; ſo läßt ſich der Punct G des vereinigten Druckes gegen das rechtwinkelige Dreyeck ECD auf folgende Art beſtimmen.

Man ſetze AE $= c$, EC $= a$, CD $= b$, EP $= x$, Pp $= dx$, ſo iſt das Drehungsmoment von EPM in Hinſicht auf AB $= \int \frac{bx\,dx}{a}.(c+x)^2 = \frac{b}{a}.(\frac{1}{2}c^2x^2 + \frac{2}{3}cx^3 + \frac{1}{4}x^4)$; und folglich das Drehungsmoment von ECD $= \frac{1}{2}ab.(c^2 + \frac{4}{3}ac + \frac{1}{2}a^2)$; das ſtatiſche Moment aber von ECD, in Hinſicht auf AB, iſt $= \frac{1}{2}ab.(c + \frac{2}{3}a)$; daraus folgt der Abſtand für den Schwingungspunct, und folglich auch für den Punct G des vereinigten Druckes von AB, nähmlich AF $= \frac{\frac{1}{2}ab.(c^2 + \frac{4}{3}ac + \frac{1}{2}a^2)}{\frac{1}{2}ab.(c + \frac{2}{3}a)} = c + \frac{2}{3}a + \frac{a^2}{12a + 18c}$.

Um FG zu beſtimmen ſey nun DR $= x$, rR $= dx$, ſo iſt Rm $= \frac{ax\,dx}{b}$, die Preſſung gegen Rm $= \frac{ax\,dx}{b}$. (RN $- \frac{1}{2}$RM). $q = \frac{ax\,dx}{b}.\ (a + c - \frac{\frac{1}{2}ax}{b}).\ q$, und ihr Moment in Hinſicht auf BD $= \frac{ax^2\,dx}{b}.(a+c - \frac{\frac{1}{2}ax}{b}).\ q$; daraus folgt das Moment der Preſſung gegen DRM in Hinſicht auf die Linie DB $= \int \frac{ax^2\,dx}{b}\ (a+c - \frac{\frac{1}{2}ax}{b}).\ q = \frac{aq}{b}.\ (\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{3}cx^3 - \frac{\frac{1}{8}ax^4}{b})$, und das Moment der

Preſ-

Preſſung gegen DCE $= \frac{1}{2}ab^2q.(\frac{5}{12}a + \frac{2}{3}c)$; die Preſ- Fig
ſung aber gegen DCE iſt $= \frac{1}{2}abq.(c + \frac{2}{3}a)$; folglich 5
iſt der Schwerpunct der Preſſung, nähmlich der Punct G des vereinigten Druckes, von DB entfernet um DH =

$$\frac{\frac{1}{2}ab^2q.(\frac{5}{12}a + \frac{2}{3}c)}{\frac{1}{2}abq.(c + \frac{2}{3}a)} = \frac{2}{3}b - \frac{ab}{24a + 36c}$$; und daraus folgt endlich

$$FG = \frac{1}{3}b + \frac{ab}{24a + 36c}.$$

Der Punct G des vereinigten Druckes liegt daher im angeführten Beyſpiele um $\frac{a^2}{12a + 18c}$ näher gegen CD als der Schwerpunct des Dreyeckes; von EC aber iſt jener um $\frac{ab}{24a + 36c}$ weiter entfernet als dieſer.

Aus dieſem Beyſpiele iſt es zu erſehen, wie man in anderen dergleichen Fällen den Punct des vereinigten Druckes zu beſtimmen habe.

§. 17.

In offenen Gefäßen, die mit einander ſo verbunden ſind, daß aus dem einen das darin befindliche Waſſer ins andere übertreten kann (in vereinigten Röhren) bleibet ſchweres Waſſer nur alsdann ruhig ſtehen, wenn die höchſten Waſſerflächen in einerley horizontalen Ebene liegen.

Es ſey die beyderſeits aufwärts gebogene Röhre APE
Fig. 6 von was immer für einer Geſtalt mit ſchwerem 6
Waſſer, deſſen eigenthümliches Gewicht $= q$ ſey, bis zur horizontalen Ebene AE angefüllet; ſo leidet eine horizontale Waſſerſchichte GF wegen des Waſſers APF (vermöge §. 14. n. 2.) einen fortgepflanzten Druck von unten nach oben = GF. AL.q, und wegen des Waſſers HF einen Druck von oben nach unten = GF. EQ.q, und iſt daher wegen EQ = AL im Gleichgewichte. Dieſes gilt von einer jeden anderen horizontalen Waſſerſchichte, ſowohl in HP als auch in DP, und auch überhaupt von einem jeden

Ele-

Fig. 6 Elementar-Theilchen des Waſſers, wenn AD und HE in einer und derſelben horizontalen Ebene AE liegen. Es iſt demnach unter dieſen Umſtänden das Waſſer im Gleichgewichte. Wäre aber die eine Oberfläche AD über eine horizontale Ebene LQ mehr erhöhet als die andere HE, nähmlich $AL > EQ$; ſo wäre auch der Druck gegen jede horizontale Schichte GF von unten nach oben größer als der Druck von oben nach unten; gegen jede horizontale Schichte BC aber wäre der Druck von unten nach oben kleiner als von oben nach unten; das Waſſer müßte daher in der Röhre FH ſteigen, und in der Röhre DB ſinken, und ſo das Gleichgewicht wieder herſtellen.

Anmerkung. Auf dieſen angeführten Satz, welcher auch durch die Erfahrung beſtätiget wird, gründet ſich der Bau und Gebrauch der bekannten hydroſtatiſchen Nivelier-Wage. Jedoch wenn die eine Röhre in Rückſicht auf die andere ſehr eng iſt, ſo wird dieſer Satz wegen der gegenſeitigen Anziehung oder Abſtoßung der Elementar-Theilchen der Röhre und des darin enthaltenen Flüſſigen zuweilen eine merkliche Ausnahme leiden. Allein ſo enge Röhren, wo dieſer Erfolg ſchon merklich wird, werden hier nicht in Erwägung gezogen; oder vielmehr die angeführte gegenſeitige Anziehung und Abſtoßung wird hier außer Acht gelaſſen.

§. 18.

Bey unelaſtiſchen flüſſigen Maſſen von verſchiedener Dichtigkeit, welche in vereinigten Röhren ohne ſich zu vermiſchen vermöge der Schwerkraft gegen einander drücken, verhalten ſich, im Stande des Gleichgewichtes, die Erhöhungen ihrer Oberflächen über die gemeinſchaftliche Scheidungs-Ebene gegen einander wie umgekehrt ihre eigenthümlichen Gewichte.

7 Es ſey EF Fig. 7. die gemeinſchaftliche horizontale Scheidungs-Ebene; das eigenthümliche Gewicht der flüſſigen Maſſe EB ſey $= q$, der Maſſe FPC aber $= Q$; ſo leidet die Schichte EF wegen der ſchweren flüſſigen Maſſe EPD einen Druck von unten nach oben $= EF.DN.Q$,

und

und wegen der ſchweren flüſſigen Maſſe EB einen Druck von oben nach unten = EF. AM. q Iſt nun EB mit EPD im Gleichgewichte; ſo iſt gewiß EF. DN. Q = EF. AM. q, und folglich auch DN : AM = q : Q. Imgleichen, damit das Gleichgewicht beſtehen könne, muß EF. DN. Q = EF. AM. q ſeyn, und folglich muß auch DN : AM = q : Q ſtatt finden. Und umgekehrt wenn DN : AM = q : Q ſich verhält; ſo iſt auch DN. Q = AM. q, und daher auch EF. DN. Q = EF. AM. q: nähmlich der Druck gegen die Schichte EF von unten nach oben iſt eben ſo groß als von oben nach unten, und folglich iſt EPD mit EB im Gleichgewichte. Es iſt leicht einzuſehen, daß bey dieſem Umſtande auch jede andere horizontale Schichte von beyden Seiten einem gleich großen Drucke ausgeſetzet iſt. Fig. 7.

Der angeführte Satz findet auch noch ſtatt, wenn die flüſſige Maſſe EPH unter der horizontalen Ebene EH von den beyden übrigen flüſſigen Maſſen EB und HC verſchieden, aber doch ſo beſchaffen wäre, daß ſie ſich mit keiner derſelben vermiſchete. So z. B. könnte EPH Queckſilber, EB Weingeiſt, und HC eine Salzauflöſung ſeyn.

§. 19.

Wie der Druck des ſchweren Waſſers gegen was immer für eine ebene Fläche zu berechnen ſey, und in welchem Puncte man ſolchen vereiniget gedenken könne, iſt bereits im 15 und 16. §. gezeiget worden. Es iſt aber auch noch erforderlich zu zeigen, wie man die Preſſungen einer flüſſigen Maſſe gegen verſchiedene gegen einander geneigte ebene Flächen vereinigen könne. Z. B. da alle Theile eines mit ſchwerem Waſſer angefüllten Gefäßes nach darauf ſenkrechten Richtungen auswärts gepreſſet werden; ſo kann man fragen, was denn das Gefäß im ganzen genommen für einen vereinigten Druck zu leiden habe, und wie deſſen Richtung beſchaffen ſey? Um dieſe Unterſuchung gehörig auszuführen, ſind folgende Hülfsſätze erforderlich.

1) Bey einem jeden ſchief abgeſchnittenen Prisma iſt der ſenkrechte Querſchnitt gleich dem ſchiefen Schnitte multipliciret mit dem Coſinus des Neigungswin-

Fig. kels der Ebene des ſchiefen gegen die Ebene des ſenk-
8 rechten Querſchnittes.

Es ſey ABC Fig. 8. der ſchiefe Schnitt eines dreyſeitigen Prisma. Iſt nun eine Seite AB dieſes ſchiefen Schnittes ſenkrecht auf den zwey Seitenlinien AO, BP des Prisma; ſo führe man den ſenkrechten Querſchnitt ABD des Prisma durch die Gerade AB, und gedenke durch die Gerade DC eine Ebene DEC auf AB ſenkrecht gelegt. Dieſe Ebene DEC ſchneide ABD in DE und ABC in EC; ſo iſt CED der Neigungswinkel der Ebene des ſchiefen gegen die Ebene des ſenkrechten Schnittes. Nun verhält ſich wegen der gemeinſchaftlichen Grundlinie der ſenkrechte Querſchnitt ABD zum ſchiefen ABC, wie die Höhe ED zur Höhe EC; und im rechtwinkeligen Dreyecke EDC iſt ED : EC = cos CED : sintot (1; es iſt daher auch ABD : ABC = cos CED : 1, nähmlich

ABD = ABC. cos CED.

Iſt aber der ſchiefe Schnitt RSQ eines dreyſeitigen Prisma ſo beſchaffen, daß keine Seite desſelben auf den Seitenlinien des Prisma ſenkrecht ſteht; ſo lege man durch einen Winkelpunct Q den ſenkrechten Querſchnitt QPO, verlängere RS und OP, bis ſie in T zuſammenſtoßen, und ziehe TQ: ſo iſt TQ die Durchſchnittslinie der Ebene des ſchiefen mit der Ebene des ſenkrechten Querſchnittes. Gedenket man nun durch OR oder durch PS eine ſenkrechte Ebene auf QT gelegt (z. B. durch PS die auf TQ ſenkrechte Ebene SPF) und bezeichnet den Neigungswinkel der Ebene RTQ gegen OTQ, nähmlich den Winkel PFS mit φ, ſo iſt

wie vorhin PQT = SQT. cos φ,
und auch OQT = RQT. cos φ,
folglich auch OQT — PQT = (RQT — SQT). cos φ,
nähmlich OPQ = RSQ. cos φ.

Iſt endlich das Prisma vielſeitig, ſo gedenke man ſolches durch Diagonal-Ebenen in lauter dreyſeitige Prismen zertheilet: ſodann iſt bey jedem dieſer letzteren der ſenkrechte Querſchnitt gleich dem ſchiefen Schnitte multi-

pli-

plicirt mit dem Coſinus des Neigungswinkels der zwey Fig. 8
Ebenen; es iſt daher auch die Summe aller ſenkrechten Querſchnitte der dreyſeitigen Prismen gleich der Summe aller ſchiefen Schnitte multipliciret mit dem Coſinus des gemeinſchaftlichen Neigungswinkels ihrer Ebenen: Nähmlich der ſenkrechte Querſchnitt eines jeden vielſeitigen Prisma iſt gleich dem ſchiefen Schnitte desſelben multipliciret mit dem Coſinus des Neigungswinkels der Ebenen beyder Schnitte.

2) Aus dem ſenkrechten Drucke des Waſſers gegen einen ſchiefen Schnitt eines Prisma entſteht nach der Richtung der Achſe des Prisma ein Druck ſo groß als das Gewicht einer Waſſerſäule, welche den ſenkrechten Querſchnitt des Prisma zur Grundfläche, und die Höhe des ſenkrechten Druckes gegen den ſchiefen Schnitt zu ihrer Höhe hat.

Es ſey BD Fig. 9 der ſchiefe Schnitt eines Prisma, 9
und EG der ſenkrechte Querſchnitt des nähmlichen Prisma durch den Winkelpunct A gelegt. Der ſchiefe Schnitt BD ſey nach einer darauf ſenkrechten Richtung dem fortgepflanzten Drucke einer flüſſigen Maſſe ausgeſetzt. Um nun zu beſtimmen, wie ſtark ein ſolcher gegen den ſchiefen Schnitt ſenkrechter Druck das Prisma nach ſeiner Länge, nähmlich nach der Richtung ſeiner Achſe, preſſe, muß man dieſen Druck in zwey andere zerlegen, ſo daß die Richtung des einen auf dem ſenkrechten Querſchnitte EG ſenkrecht ſey, die Richtung des anderen aber mit dieſem Querſchnitte EG parallel laufe. Dieſes wird erhalten, wenn man aus dem Vereinigungspuncte R des ſenkrechten Druckes gegen BD eine Senkrechte RS auf die Ebene BD und eine Senkrechte RT auf die Ebene EG gedenket, ferner aus einem beliebigen Puncte S der Geraden RS eine Senkrechte ST auf RT zieht, und endlich das Rechteck TQ ergänzet. Sodann zerfällt der Druck nach der Richtung SR in zwey andere nach den Richtungen TR und QR, welche beyde mit dem erſten gleichgeltend ſind (3. Th. §. 71.), wo nun der Druck nach der Richtung TR derjenige iſt, welchen das

Fig. 9 Prisma wegen der ſenkrechten Preſſung gegen BD nach der Richtung ſeiner Achſe leidet; der andere Druck aber nach der Richtung QR, da er mit EG prallel angebracht iſt, verurſachet nach der Richtung der Achſe des Prisma gar keine Wirkung. Wenn man daher den gegen BD ſenkrechten Druck nach der Richtung SR mit P, und den daraus entſtehenden gegen EG ſenkrechten Druck nach der Richtung TR mit p bezeichnet; ſo iſt $p = P. \cos TRS$ (vermöge 3. Th. §. 69.), und folglich $\cos TRS = \frac{p}{P}$.

Da nun die Ebene BD auf der Geraden RS, und EG auf RT ſenkrecht iſt; ſo iſt ſowohl die Ebene BD als auch EG auf der Ebene des Kräften-Parallelogramms TQ ſenkrecht; und folglich iſt (wegen 2. Th. §. 471.) auch ihre gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie HI, auf eben dieſer Ebene TQ ſenkrecht. Wenn daher die genugſam erweiterte Ebene TQ von GE in NK und von BD in KM durchſchnitten wird; ſo iſt (wegen 2. Th. §. 466.) ſowohl NK als auch MK ſenkrecht auf HI, und folglich MKN der Neigungswinkel des ſchiefen Schnittes BD gegen den ſenkrechten Querſchnitt EG (2. Th. §. 468.)

Ferner iſt im rechtwinkeligen Drepecke RLK, weil RT durch EG ſenkrecht gezogen worden iſt, und daher auch (wegen 2. Th. §. 466.) von NK in L ſenkrecht durchſchnitten wird, $RKL + KRL = 90°$; auch iſt, weil SR auf KM ſenkrecht ſteht, $TRS + KRL = 90°$; folglich iſt auch $RKL + KRL = TRS + KRL$; und daher auch $TRS = RKL$, nähmlich der Neigungswinkel $MKN = TRS$.

Nun iſt wegen des ehevor angeführten Satzes $EG = BD. \cos MKN$; folglich auch $EG = BD. \cos TRS$, und $\cos TRS = \frac{EG}{BD}$. Vorhin aber war $\cos TRS = \frac{p}{P}$; folglich iſt auch $\frac{p}{P} = \frac{EG}{BD}$, und $P : p = BD : EG$. Nähmlich der gegen den ſchiefen Schnitt BD eines

Pris-

Priſma ſenkrechte Druck P verhält ſich zu dem daraus entſtehenden ſenkrechten Drucke p gegen den ſenkrechten Querſchnitt EG des nähmlichen Priſma wie der ſchiefe Schnitt BD zum ſenkrechten Querſchnitte EG; Fig. 9
und es iſt daher $p = \frac{EG}{BD} . P$. Nun aber iſt $P = BD . a . q$ bey der Preſſung einer flüſſigen Maſſe gegen die Fläche BD, wenn a die Höhe des Druckes (§. 13.), und q das eigenthümliche Gewicht des Flüſſigen bedeutet; folglich iſt $p = EG . a . q$ das Gewicht einer Säule der nähmlichen flüſſigen Maſſe, welche EG zur Grundfläche, und mit P einerley Höhe a hat.

3) Und nun iſt es leicht einzuſehen, wie man aus dem gegebenen ſenkrechten Drucke einer flüſſigen Maſſe gegen eine gegebene ebene Fläche BD den Druck finden könne, welcher daraus nach einer anderen gegebenen Richtung TR entſteht. Man darf nähmlich in einem ſolchen Falle nur auf der gegebenen Grundfläche BD ein Priſma AFC gedenken, deſſen Seitenlinien mit der gegebenen Richtung TR parallel ſind, um den ſenkrechten Querſchnitt EG zu erhalten, woraus ſich der geſuchte Druck ſodann leicht (nach n. 2.) beſtimmen läßt.

4) Eben ſo läßt ſich beſtimmen, wie groß der vereinigte Druck ſey, welcher aus den ſenkrechten Preſſungen einer flüſſigen Maſſe auf mehrere gegen einander geneigte feſte ebene Flächen nach einer gegebenen Richtung entſteht, wenn man in der nähmlichen gegebenen Richtung auf jede gegebene Fläche ein Priſma gedenket. Auf dieſe Art findet man z. B., daß der vereinigte Druck des ſchweren Waſſers gegen die zwey Seitenflächen DP, DO Fig. 8. eines ſenkrecht ſtehenden prismatiſchen Gefäßes nach einer auf AP ſenkrechten Richtung genau ſo groß iſt, als der Druck gegen AP, nur in der gerade entgegen geſetzten Richtung; weßwegen dieſe Preſſungen auch im Gleichgewichte ſind.

§. 20.

Aus allen ſenkrechten Preſſungen des in einem Gefäße enthaltenen ſchweren Waſſers gegen die Theile

Fig. le des feſten Umfanges entſteht ein verticaler Druck nach unten, der dem ganzen Gewichte des Waſſers gleich iſt. Und obgleich die Seitenflächen des Gefäßes auch ſeitwärts gedrücket werden; ſo heben doch alle horizontale Preſſungen einander auf: nähmlich das Gefäß im ganzen genommen iſt in horizontaler Richtung im Gleichgewichte. In Hinſicht auf eine Unterlage, auf welcher ein mit ſchwerem Waſſer angefülltes Gefäß ruhet, iſt es nähmlich eben ſo viel, als wenn das Gefäß mit einer feſten Maſſe angefüllet wäre, die mit dem Waſſer einerley eigenthümliches Gewicht hätte.

10 Es ſey das Gefäß ACDB Fig. 10. von was immer für einer Geſtalt bis an die horizontale Ebene AB mit ſchwerem Waſſer angefüllet, und man gedenke

Erſtlich die ganze Waſſermaſſe in ſo kleine verticale Waſſerſäulen zertheilet, daß man die Grundflächen derſelben, mittelſt deren ſie mit dem Umfange des Gefäßes zuſammengränzen, für ebene Flächen anſehen könne (die Waſſerſäulchen können ſo dünne angenommen werden, daß ihre Grundflächen unendlich klein werden) ſo drücket jede ſolche Waſſerſäule das Gefäß in verticaler Richtung von oben nach unten mit einer Kraft, die dem Gewichte einer ſolchen Waſſerſäule gleich iſt. Denn iſt eine ſolche Waſſerſäule wie ED oben durch die Oberfläche des ruhenden Waſſers und unten durch die Bodenfläche wagrecht abgeſchnitten; ſo leidet (wegen §. 11.) die Grundfläche FD und daher auch das Gefäß wegen ſeines Umfanges einen Druck in verticaler Richtung von oben nach unten, der dem Gewichte der Waſſerſäule ED gleich iſt. Iſt die Waſſerſäule GI oben, wie die vorige, unten aber ſchief abgeſchnitten; ſo iſt (wegen §. 15.) die Höhe des ſenkrechten Druckes gegen DI der Abſtand des Schwerpunctes der Fläche DI von der Oberfläche des Waſſers. Daraus entſteht (wegen §. 19. n. 2.) nach verticaler Richtung von oben nach unten ein Druck ſo groß als das Gewicht einer Waſſerſäule, welche den ſenkrechten Querſchnitt der Waſſerſäu-

le DH zu ihrer Grundfläche, und den Abſtand des Schwer- punctes der Fläche DI von der Oberfläche des Waſſers zu ihrer Höhe hat; und iſt daher genau dem Gewichte dieſer Waſſerſäule GDIH gleich. Aus derſelben Urſache iſt bey der oben und unten ſchief abgeſchnittenen Waſſerſäule KLNM der verticale Druck von oben nach unten gegen MN gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule BMNO, und der verticale Druck gegen KL nach der gerade entgegengeſetzten Richtung von unten nach oben iſt gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule BKLO (vermöge §. 15. u. 19. n. 2.); und folglich iſt bey dieſer Waſſerſäule KLNM der auf das Gefäß in verticaler Richtung von oben nach unten wirkende Druck gleich der Differenz der Waſſerſäulen BMNO und BKLO; er iſt daher gleich dem Gewichte der Waſſerſäule KMNL. Dieſes gilt von einer jeden anderen verticalen Waſſerſäule, woraus das im Gefäße befindliche Waſſer beſteht. Folglich leidet das Gefäß im ganzen genommen wegen der ſenkrechten Preſſungen des darin enthaltenen Waſſers gegen die verſchiedenen Theile des feſten Umfanges in verticaler Richtung von oben nach unten einen Druck, der dem Gewichte des ſämmtlichen darin befindlichen Waſſers gleich iſt; eben ſo als wenn das Gefäß mit einer feſten Maſſe angefüllet wäre, die mit dem Waſſer einerley ſpecifiſches Gewicht hätte. Fig. 10

Es iſt übrigens einleuchtend, daß die mittlere Richtung aller verticalen Preſſungen durch den Schwerpunct des ganzen Waſſerkörpers geht, welcher wegen der gleichförmigen Dichtigkeit mit dem Schwerpuncte des geometriſchen Raumes, den das Waſſer im Gefäße einnimmt, einerley iſt.

Zweytens gedenke man die ganze Waſſermaſſe in lauter horizontal liegende Waſſerſäulchen mit einer beliebigen verticalen Durchſchnitts-Ebene des Gefäßes in paralleler Richtung von unendlich kleinen Grundflächen zertheilet, ſo daß man jede ſolche Grundfläche als eine ebene Fläche anſehen könne. Es ſey eine ſolche horizontal liegende Waſſerſäule PKLQ, wovon der ſenkrechte Querſchnitt $= f$, und der Abſtand des Schwerpunctes der Fläche PQ ſowohl als

auch

Fig. 10 auch der Fläche KL von der Oberfläche des Waſſers = a ſeyn mag; ſo leidet PQ in horizontaler Richtung parallel zu LQ einen Druck = $f. a. q.$ (wegen §. 15. u. 19. n. 2), und KL in gerade entgegengeſetzter horizontalen Richtung einen eben ſo großen Druck = $f. a. q$ wenn q das eigenthümliche Gewicht der flüſſigen Maſſe bedeutet; folglich heben dieſe zwey Preſſungen wegen der Feſtigkeit des Gefäßes einander auf. Und ſo liegen in jeder horizontalen Richtung zwey Elemente von dem feſten Umfange des Gefäßes einander gegenüber, die nach entgegengeſetzten horizontalen Richtungen gleichviel Druck leiden. Mithin heben alle horizontale Preſſungen einander auf.

Hieraus fließende Folge:

1) Nun iſt es leicht einzuſehen, daß man das Gewicht von einer beliebigen Menge einer flüſſigen Maſſe mittelſt der Wage eben ſo beſtimmen könne, wie bey einem feſten Körper. Wenn man nähmlich von dem ſämmtlichen Gewichte eines mit einer flüſſigen Maſſe ganz oder zum Theil angefüllten Gefäßes das Gewicht des leeren Gefäßes abzieht; ſo iſt der Ueberreſt das Gewicht der flüſſigen Maſſe. Iſt nun dabey auch der Inhalt der flüſſigen Maſſe im Gefäße bekannt; ſo ergibt ſich ferner (nach 3. Th. §. 15.) auch ihr eigenthümliches Gewicht.

III. Abſchnitt.

Grundlehre des Gleichgewichtes des ſchweren Waſſers mit hineingetauchten feſten Körpern.

§. 21.

11 12 Wenn ein feſter Körper AKD Fig. 11 und 12 in eine ruhig ſtehende flüſſige Maſſe MNPQ entweder ganz oder

oder auch nur zum Theil eingetauchet iſt; ſo leidet der- Fig.
ſelbe vermöge des gegen ſeine Oberfläche fortgepflanz- 11
ten Druckes in verticaler Richtung von unten nach 12
oben einen Druck, der dem Gewichte der verdrängten flüſſigen Maſſe AKD gleich iſt. Die verticale Richtungslinie dieſes Druckes geht durch den Schwerpunct des geometriſchen Raums der verdrängten flüſſigen Maſſe; die Preſſungen aber in horizontaler Richtung heben einander auf, oder ſind im Gleichgewichte. Es entſteht nähmlich aus den ſenkrechten Preſſungen einer flüſſigen Maſſe gegen die verſchiedenen Theile der Oberfläche eines eingetauchten feſten Körpers ein vereinigter Druck in verticaler Richtung von unten nach oben, der dem Gewichte der verdrängten flüſſigen Maſſe gleich iſt, und deſſen Richtung durch den Schwerpunct des geometriſchen Raumes dieſer verdrängten flüſſigen Maſſe geht; wo der Schwerpunct ſo zu beſtimmen iſt, als wenn dieſer geometriſche Raum durchaus mit einer gleichförmig dichten ſchweren Maſſe angefüllet wäre, es möge übrigens die nun darin wirklich befindliche Maſſe des eingetauchten feſten Körpers wie immer ungleichförmig vertheilet ſeyn.

Um dieſe Wahrheit einzuſehen, gedenke man den eingetauchten Körper AKD (in Fig. 11. nähmlich den ganzen Körper, in Fig. 12. aber nur den Theil deſſelben unter der horizontalen Ebene des Waſſers, wo indeſſen der feſte Körper durch irgend eine Vorrichtung in der angenommenen Lage ruhig erhalten werden mag) in ſo kleine verticale Priſmen zertheilet, daß man ihre Grundflächen für unendlich klein annehmen, und daher für ebene Flächen anſehen könne. Es ſey ein ſolches Priſma ADEB; ſo leidet die ebene Fläche DE nach einer darauf ſenkrechten Richtung (wegen §. 15.) einen Druck $= DE. FI. q$, und die ebene Fläche AB nach einer darauf ſenkrechten Richtung einen Druck $= AB. CI. q$, wo MN die horizontale Oberfläche der flüſſigen Maſſe, und q ihr eigenthümliches Gewicht iſt. Daraus entſteht (nach §. 19 II.) wegen der

ſenk-

Fig. 11 12 ſenkrechten Preſſung gegen DE in verticaler Richtung von oben nach unten gegen den feſten Körper ein Druck = GH. FI. q, und wegen der ſenkrechten Preſſung gegen AB in verticaler Richtung von unten nach oben ein Druck = GH. CI. q, wo GH dem ſenkrechten Querſchnitte des Prisma DB gleich, und der eine Druck dem anderen gerade entgegen geſetzt iſt. Es iſt daher der Druck, welchen der feſte Körper wegen der ſenkrechten Preſſungen gegen die Grundflächen des Prisma DB in verticaler Richtung von unten nach oben leidet, = GH. CI. q — GH. FI. q = GH. (CI — FI) q = GH. FC. q = dem Gewichte eines Prisma DB der flüſſigen Maſſe, worin der feſte Körper eingetaucht iſt; und die Richtung dieſes Druckes geht durch den Schwerpunct eines ſolchen gleichförmig dichten Prisma DB. Eben ſo iſt der Druck, welchen der feſte Körper in Fig. 12 wegen der ſenkrechten Preſſung gegen die Grundfläche VT in verticaler Richtung von unten nach oben leidet, = RS. OL. q = dem Gewichte eines Prisma ST der flüſſigen Maſſe, worin der feſte Körper eingetaucht iſt. Die Richtung dieſes Druckes geht durch den Schwerpunct des Prisma ST, weil man bey einer jeden ſolchen unendlich kleinen Fläche wie VT, AB, DE den darauf fortgepflanzten ſenkrechten Druck in ihrem Schwerpuncte vereiniget gedenken kann. Dieſes gilt von dem verticalen Drucke bey einem jeden andern Prisma, woraus der Körper AKD beſteht. Folglich iſt der ſämmtliche Druck, welchen der eingetauchte feſte Körper AKD wegen des gegen ſeine Oberfläche fortgepflanzten Druckes in verticaler Richtung von unten nach oben leidet, dem Gewichte der verdrängten flüſſigen Maſſe AKD gleich; und die mittlere Richtung dieſes Druckes geht durch den Schwerpunct des geometriſchen Raumes AKD der verdrängten flüſſigen Maſſe. Wenn man nähmlich den Abſtand desjenigen Punctes, durch welchen die Richtung des vereinigten Druckes geht, von zwey verticalen Ebenen (nach 3. Th. §. 132. n. 3.) mittelſt der Momente berechnet; ſo findet man ſolchen eben ſo groß als den Abſtand des Schwerpunctes des geometriſchen Raumes der ver-

verdrängten flüſſigen Maſſe, eben ſo, als wenn dieſer Raum wirklich mit einer ſchweren flüſſigen Maſſe von gleichförmiger Dichtigkeit angefüllet wäre, wo inzwiſchen die ſchwere Maſſe innerhalb der eingetauchten feſten Oberfläche wie immer ungleichförmig vertheilet ſeyn mag, ſo daß der Schwerpunct dieſer eingetauchten ſchweren Maſſe DBK mit dem Schwerpuncte des verdrängten Flüſſigen in eben dieſem geometriſchen Raume DBK nicht einerley Lage hat. Fig. 11 12

Daß die Preſſungen in horizontalen Richtungen allenthalben im Gleichgewichte ſind, kann man ſich eben ſo wie im 20. §. überzeugen. Wenn man nähmlich den feſten Körper DBK in lauter horizontal liegende Prismen mit einer beliebigen verticalen Ebene in paralleler Richtung zertheilet; ſo ſind bey jedem ſolchen Prisma die Preſſungen gegen ſeine beyden Grundflächen in der angenommenen horizontalen Richtung im Gleichgewichte.

§. 22.

Der Druck einer ſchweren flüſſigen Maſſe gegen einen eingetauchten feſten Körper in der verticalen Richtung von unten nach oben kann der Auftrieb genannt werden.

In Fig. 11, wo der feſte Körper ganz in der flüſſigen Maſſe eingetauchet iſt, verbleibet der Auftrieb bey einer flüſſigen Maſſe von gleichförmiger Dichtigkeit gegen einen und denſelben feſten Körper in jeder Tiefe immer derſelbe, weil in einem ſolchen Falle das Gewicht der verdrängten flüſſigen Maſſe in jeder Tiefe einerley iſt.

In Fig. 12 hingegen, wo der feſte Körper nicht ganz eingetauchet iſt, wird der Auftrieb größer oder kleiner, je nachdem ein größerer oder kleinerer Theil des feſten Körpers eingetauchet wird. Tauchet man endlich den feſten Körper ganz ein; ſo bleibt ſodann der Auftrieb, wie im vorigen Falle bey einer flüſſigen Maſſe von gleichförmiger Dichtigkeit, in jeder Tiefe unveränderlich. Der ſenkrechte Druck gegen jedes Theilchen der Oberfläche eines eingetauchten Körpers wird zwar deſto größer, je tiefer ſolcher verſenket wird, der daraus entſpringende Auftrieb aber bleibt doch dabey ungeändert. Nur in ſolchen Fällen, wo die

Flüſ-

Fig. 11 12 Flüſſigkeit in verſchiedenen Tiefen eine verſchiedene Dichtigkeit hätte, wäre der Auftrieb in verſchiedenen Tiefen auch verſchieden.

§. 23.

Im vorigen 21. §. in Fig. 11 und 12 iſt angenommen worden, daß der feſte Körper durch eine beſondere Kraft, oder ſonſt durch eine Befeſtigung in der angenommenen Lage unverrückt erhalten werde. Wird nun der Körper von dieſer Befeſtigung gänzlich befreyet; ſo wird er vermöge ſeines ganzen Gewichtes zu ſinken ſtreben. Aber zugleich preſſet der Auftrieb der flüſſigen Maſſe denſelben in die Höhe; ſo daß daher zwey Kräfte nach entgegengeſetzten Richtungen zugleich auf den Körper wirken. Setzet man nun in Fig. 11 das Gewicht des feſten Körpers $= P$, und das Gewicht der verdrängten flüſſigen Maſſe, nähmlich das Gewicht der flüſſigen Maſſe bey einem dem feſten Körper gleich großen Kubikinhalte $= p$; ſo iſt, wenn $P > p$ iſt, die bewegende Kraft, welche den Körper von oben nach unten treibet $= P - p$, wo die Richtung der Kraft P durch den Schwerpunct des feſten Körpers, und die Richtung des Auftriebes p durch den Schwerpunct des geometriſchen Raumes der verdrängten flüſſigen Maſſe durchgeht. Der feſte Körper wird daher in einem ſolchen Falle mit beſchleunigter Bewegung bis zum Boden des Gefäßes hinunter ſinken. Eine ſolche beſchleunigte Bewegung läßt ſich jetzt noch nicht beſtimmen, wenn ſchon die bewegende Kraft $P - p$ und die bewegte Maſſe P für bekannt angenommen werden, weil bey der Bewegung eines feſten Körpers in einer flüſſigen Maſſe noch ein Widerſtand entſteht, der die Bewegung verzögert, wovon weiter unten gehandelt werden ſoll.

Iſt aber in Fig. 11 das Gewicht des feſten Körpers eben ſo groß, als das Gewicht der flüſſigen Maſſe in einem eben ſo großen Kubikinhalte, nämlich $P = p$; ſo iſt die bewegende Kraft bey einem ſolchen frey gelaſſenen Körper in verticaler Richtung $= 0$; der feſte Körper wird daher in einem ſolchen Falle in einer flüſſigen Maſſe von

gleich-

gleichförmiger Dichtigkeit in jeder Tiefe ſchwebend erhal- Fig.
ten. 11

Iſt endlich in Fig. 11 $P < p$; ſo wird der feſte 12
Körper mit der Kraft $p - P$ in die Höhe getrieben, und ſo weit in die Höhe ſteigen, bis nur ein ſo großer Theil ſeines körperlichen Inhaltes eingetauchet iſt, daß ſodann das Gewicht der verdrängten flüſſigen Maſſe eben ſo viel beträgt, als das ganze Gewicht des feſten Körpers.

Eben ſo wird in Fig. 12 der freygelaſſene feſte Körper ganz zu Boden ſinken, wenn er mehr wiegt, als das Gewicht des flüſſigen in einem eben ſo großen Kubikinhalte; wiegt er aber weniger, ſo wird er ſich nur ſo tief eintauchen, bis das Gewicht der verdrängten flüſſigen Maſſe eben ſo viel beträgt, als das ganze Gewicht des feſten Körpers. Sodann iſt die Kraft, die ihn hinunter treibet, eben ſo groß als die Kraft, die ihn hinaufwärts preſſet; der feſte Körper iſt daher in einem ſolchen Falle in Hinſicht auf das Steigen und Fallen im Gleichgewichte.

Was nun der feſte Körper in einem jeden dieſer beſonderen Fälle für eine Lage annehmen werde, muß noch unterſuchet werden. Wenn nähmlich der Schwerpunct der verdrängten flüſſigen Maſſe, durch welchen die mittlere Richtung des Auftriebes geht, mit dem Schwerpuncte des feſten Körpers nicht in eben derſelben Vertical-Linie lieget; ſo ſtrebet zwar der Auftrieb (wegen 3. Th. §. 142.) den feſten Körper in verticaler Richtung eben ſo zu heben, als wenn ſeine mittlere Richtung durch den Schwerpunct des feſten Körpers ginge: dabey ſtrebet aber auch eben dieſer Auftrieb den feſten Körper um deſſen Schwerpunct mittelſt eines Hebels zu drehen, der ſich ergibt, wenn man aus dieſem Schwerpuncte eine ſenkrechte auf die mittlere Richtung des Auftriebes gedenket.

§. 24.

Wenn in Fig. 11 der ganz eingetauchte feſte Körper von gleichförmiger Dichtigkeit iſt; ſo lieget der Schwerpunct des feſten Körpers mit dem Schwerpuncte der verdrängten flüſſigen Maſſe in einem und demſelben Puncte beyſammen.

Die

Fig. Die Richtung des Gewichtes P des feſten Körpers iſt da-
11 her in einem ſolchen Falle bey jeder Lage desſelben der
12 Richtung des Auftriebes p in einer und derſelben Verti-cal-Linie gerade entgegengeſetzt; und folglich iſt einem ſolchen Körper jede Lage gleichgültig ſowohl beym Sinken, wenn $P > p$, als auch beym Steigen, wenn $P < p$, und auch im Stande des Gleichgewichtes oder beym Schweben, wenn $P = p$ iſt.

Iſt aber der ganz eingetauchte feſte Körper von ungleichförmiger Dichtigkeit, oder die Maſſe desſelben in ſeinem geometriſchen Raume ungleichförmig vertheilet (wie z. B. bey einer Kugel, wo der eine Abſchnitt von Holz und der andere von Metall wäre, ingleichen bey einer excentriſch ausgehöhlten eiſernen Kugel oder Bombe u. ſ. w.); ſo wird ein ſolcher Körper ſowohl beym Sinken, als beym Steigen, als auch bey dem Schweben oder im Stande des Gleichgewichtes immer eine ſolche Lage annehmen, daß der Schwerpunct des feſten Körpers gerade unter dem Schwerpuncte der verdrängten flüſſigen Maſſe in einer und derſelben Vertical-Linie ſich befinde; das iſt, daß der ſchwerere Theil des feſten Körpers unten ſey. In einer ſolchen Lage des feſten Körpers ſind die Richtungen des Gewichtes P, und des Auftriebes p, einander gerade entgegengeſetzt; und wenn der feſte Körper durch was immer für einen Umſtand, etwa durch eine Erſchütterung der flüſſigen Maſſe, in eine andere Lage gebracht wird, daß die Richtungen des Gewichtes und des Auftriebes neben einander vorbeyſtreichen: ſo wird ſodann durch eben dieſe zwey Kräfte der feſte Körper angetrieben werden durch die Drehung um ſeinen Schwerpunct nach einigen Schwankungen die vorige Lage wieder anzunehmen. Davon kann man ſich auf folgende Art überzeugen.

13 Es werde Fig. 13 ein feſter Körper von ungleichförmiger Dichtigkeit in der flüſſigen Maſſe in einer ſolchen Lage frey gelaſſen, daß ſein Schwerpunct in G, und der Schwerpunct der verdrängten flüſſigen Maſſe in g ſich befinde, wo die Vertical-Linie PG neben pg vorbeyſtreichet.

Man

Man gedenke durch dieſe zwey Puncte G, g eine unbieg- Fig.
ſame gerade Linie AB quer durch den feſten Körper gezo- 13
gen; ſo iſt wegen der Feſtigkeit des Körpers der Erfolg eben ſo, als wenn das Gewicht *P* des feſten Körpers auf den Hebel AB nach der Richtung PG hinunterwärts, und der Auftrieb *p* nach der Richtung pg auf den nähmlichen Hebel aufwärts wirkete. Der Hebel und mithin auch der damit verbundene feſte Körper muß ſich daher nach derjenigen Seite, wo der Schwerpunct G des feſten Körpers liegt, (wegen 3. Th. §. 142.) um dieſen Schwerpunct G ſo drehen, daß der Schwerpunct g der verdrängten flüſſigen Maſſe gerade über den Schwerpunct G des feſten Körpers bey der gänzlichen Eintauchung zu liegen kommt. Sodann ſind die zwey Kräfte *P*, *p* einander gerade entgegengeſetzt und können keine fernere Umdrehung bewirken. Auch ſtrebet nun der feſte Körper, wenn er durch was immer für einen Umſtand aus dieſer letzten Lage gebracht wird, ſich wieder in dieſelbe Lage hineinzudrehen. Nimmt man den Körper AB in einer ſolchen Lage an, daß der Schwerpunct G ſich gerade oberhalb g befindet; ſo iſt zwar auch keine Urſache zum Drehen vorhanden; allein durch den geringſten Umſtand könnte da der Schwerpunct G ſeitwärts zu liegen kommen, und der feſte Körper müßte ſich ſodann weiter drehen, bis G gerade unter g zu liegen kommt.

§. 25.

Wenn ein feſter Körper von einer flüſſigen Maſſe in einer ſolchen Lage im Gleichgewichte erhalten wird, daß er zum Theil aus der flüſſigen Maſſe hervorraget; ſo ſagt man, daß der Körper ſchwimme, oder daß er ein ſchwimmender Körper ſey.

Zu den ſchwimmenden Köpern gehören nicht nur allein ſolche feſte Maſſen von gleichförmiger Dichtigkeit, deren eigenthümliches Gewicht geringer iſt, als das Gewicht der flüſſigen Maſſe (die ſpecifiſch leichter ſind als das Flüſſige); ſondern es können auch aus ſolchen feſten Maſſen, die ein weit größeres eigenthümliches Gewicht haben als das Flüſſige (die ſpecifiſch ſchwerer ſind als das Flüſſige)

ſchwim-

Fig. ſchwimmende Körper verfertiget werden, wenn man eine ſolche feſte Maſſe nur gegen die äußere Oberfläche eines Raumes dergeſtalt vertheilet, und im innern des Raumes leere Höhlungen von beträchtlicher Größe, in welche das Flüſſige nicht hineindringen kann, ſo anbringet, daß ſodann das ganze Gewicht eines ſolchen Körpers geringer ſey, als das Gewicht einer flüſſigen Mäſſe unter dem nähmlichen äußeren Umfange. Daher können hohle metallene Kugeln, ſo wie verſchiedene andere ausgehöhlte Körper mit ſpecifiſch ſchwereren Laſten beladen auf dem Waſſer ſchwimmen; z. B. beladene Schiffe auf den Strömen, und auf dem Meere. Auch iſt es leicht einzuſehen, daß ein feſter Körper auf einer flüſſigen Maſſe ſchwimmen könne, in einer anderen hingegen ganz zu Boden ſinke. So z. B. ſchwimmet ein Stück Eiſen auf dem Queckſilber, im Waſſer hingegen ſinket es zu Boden; weil Queckſilber in einem dem Stück Eiſen gleich großen Kubikinhalte mehr, Waſſer hingegen weniger wiegt, als daſſelbe Stück Eiſen. So können auch ſchwer beladene Schiffe, die auf dem Meere noch ſchwimmen, beym Einlaufen in einen Strom zu Boden ſinken, weil Stromwaſſer ſpecifiſch leichter iſt, als Meerwaſſer.

Wenn nun ein Gefäß zum Theil mit Queckſilber und der Ueberreſt mit Waſſer angefüllet, ſodann aber eine eiſerne Kugel in das angefüllte Gefäß hineingelaſſen wird; ſo fällt die Kugel durch das Waſſer hindurch, und tauchet ſich zum Theil ins Queckſilber ein, wo ſie ſodann in dieſer Lage ſchwebend bleibt. Aus den gegebenen ſpecifiſchen Gewichten des Waſſers, Queckſilbers und Eiſens läßt ſich der ins Queckſilber eingetauchte Theil der Kugel berechnen, welches aber dem eigenen Fleiße zur Uebung und Anwendung des bereits erlernten überlaſſen wird.

§. 26.

Um nun zu unterſuchen, ob ein gegebener feſter Körper auf einer gegebenen flüſſigen Maſſe ſchwimmen könne oder nicht, kann man auf folgende Art verfahren.

1) Iſt der Kubikinhalt des gegebenen Körpers durchaus mit einer feſten Materie von gleichförmiger Dichtigkeit an-

angefüllet; ſo ſehe man nach, ob das eigenthümliche Gewicht der feſten Maſſe größer, kleiner, oder eben ſo groß ſey, als das eigenthümliche Gewicht der flüſſigen Maſſe. Im erſten Falle wird der feſte Körper zu Boden ſinken, im zweyten ſchwimmen, und im dritten in jeder Tiefe ſchweben. Denn wenn man den Kubikinhalt des feſten Körpers $= K$, ſein ganzes Gewicht $= P$, und ſein eigenthümliches Gewicht $= Q$, das Gewicht aber der flüſſigen Maſſe unter dem nähmlichen Kubikinhalte $= p$, und ihr eigenthümliches Gewicht $= q$, ſetzet; ſo iſt $P = K.Q$, und $p = K.q$ (wegen 3. Thl. §. 15.). Es iſt daher $P > p$, oder $P = p$, oder endlich $P < p$, nachdem $Q > q$, oder $Q = q$, oder endlich $Q < q$ iſt. Fig.

2) Iſt der gegebene Körper allenthalben mit einer Oberfläche umgeben, in welche das Flüſſige nicht hineindringen kann, wie bey einer hohlen Kugel, bey einer Tonne, wo ſich im inneren Raume verſchiedene Körper befinden können, ingleichen bey einem aus verſchiedenen Materien zuſammengefügten feſten Körper, und dergleichen; ſo berechne man bey einem ſolchen Körper den ganzen Kubikinhalt $= K$, der in der äußerſten Oberfläche eingeſchloſſen iſt, und beſtimme auch ſein ganzes Gewicht $= P$. Dieſes Gewicht dividire man durch den Kubikinhalt; ſo erhält man (nach 3. Th. §. 15) ſein mittleres ſpecifiſches Gewicht $= Q$. Nachdem nun Q weniger, mehr, oder eben ſo viel beträgt als das ſpecifiſche Gewicht des Flüſſigen; ſo wird ein ſolcher Körper entweder ſchwimmen, oder zu Boden ſinken, oder im Flüſſigen ſchwebend erhalten werden. Dieſes findet man auch, wenn man unterſuchet, ob das Flüſſige unter dem nähmlichen Kubikinhalte K mehr, weniger, oder eben ſo viel wiege, als der gegebene Körper.

3) Iſt der gegebene Körper oben offen, wie ein Schiff; oder ſonſt ein offenes Gefäß; ſo ſtelle man ſich eine horizontale Ebene vor, die einen ſolchen Körper oberwärts bedecket. Sodann berechne man den Kubikinhalt, der unter dieſer horizontalen Ebene und zwiſchen den übrigen Seitenflächen eines ſolchen Körpers ſich befindet; man beſtimme

Fig. auch ſein ganzes Gewicht ſammt der Ladung, wenn eine ſich darin befindet; und endlich unterſuche man, ob das Gewicht des Flüſſigen unter dem nähmlichen Kubikinhalte mehr, weniger, oder eben ſo viel betrage als das vorige Gewicht. Im erſten Falle wird der Körper ſchwimmen, im zweyten zu Boden ſinken, und im dritten ſich genau bis an die gedachte horizontale Ebene einſenken.

Leget man aber ein ſolches Gefäß ſo auf das Flüſſige, daß dieſes gleich über den Rand des Gefäßes hineinſtürzet, oder ſind Oeffnungen vorhanden, wodurch das Flüſſige in die Höhlungen eindringen kann; ſo wird das Gefäß wie jeder andere feſte Körper betrachtet. Es wird ſchwimmen, oder zu Boden ſinken, oder ſchweben, je nachdem das mittlere ſpecifiſche Gewicht der Materie, woraus es verfertiget iſt, kleiner, größer, oder eben ſo groß iſt, als das ſpecifiſche Gewicht des Flüſſigen.

§. 27.

Da ein ſchwimmender Körper ſich nur ſo tief in das Flüſſige einſenket, bis das Gewicht der verdrängten flüſſigen Maſſe dem ganzen Gewichte des ſchwimmenden Körpers gleich wird; ſo läßt ſich bey einem beladenen Schiffe das ganze Gewicht des Schiffes ſammt der Ladung dadurch beſtimmen, wenn man den Kubikinhalt des verdrängten Waſſers berechnet, und ſolchen mit dem eigenthümlichen Gewichte des Waſſers multipliciret. Auch läßt ſich auf dieſe Art das Gewicht der Ladung berechnen, welche ein Schiff zu tragen vermögend iſt, wenn es ſich dadurch bis zu einem gegebenen horizontalen Querſchnitte einſenken ſoll. Man muß in einem ſolchen Falle den Kubikinhalt des Schiffes zwiſchen dem gegebenen oberen Querſchnitte und zwiſchen dem unteren Querſchnitte an der Waſſerfläche bey dem leeren Stande desſelben beſtimmen, und mit dem bekannten eigenthümlichen Gewichte des Waſſers multipliciren; ſo erhält man das geſuchte Gewicht der Ladung. Imgleichen läßt ſich aus einer gegebenen Laſt $= P$, die man entweder in ein Schiff hineinleget oder auch herausnimmt, derjenige Kubikinhalt $= K$, berechnen, um welchen das Schiff im erſten Falle ſich

tiefer einſenket, im zweyten Falle aber aus dem Waſſer emporſteiget. Es iſt nähmlich der geſuchte Kubikinhalt *K* gleich dem gegebenen Gewichte *P* getheilet durch das eigenthümliche Gewicht des Waſſers. Daraus läßt ſich ferner aus der bekannten Geſtalt des Schiffes auch die Tiefe beſtimmen, um welche das Schiff im erſten Falle tiefer einſinket, und im zweyten Falle emporſteiget. Fig.

Anmerkung. Der Auftrieb des Waſſer (§. 22.) kann in verſchiedenen Fällen ſehr vortheilhaft benutzet werden um große Laſten etwas in die Höhe zu heben. So z. B. kann ein beladenes Schiff über **Untiefen** (Strecken wo die Tiefe des Waſſers kleiner iſt, als die Tiefe des eingetauchten Theiles bey dem ſchwimmenden Schiffe) gebracht werden, wenn man an ſolches zwey platte Fahrzeuge, die anfänglich mit Waſſer gefüllet ſind, zu beyden Seiten gehörig befeſtiget, und ſodann das Waſſer ausſchöpfet. Dadurch können oft beladene Schiffe von der größten Gattung ſo viel gehoben werden, daß ſie ſodann über eine Untiefe fortſegeln können, wo ſie ohne dieſes Hülfsmittel ſtranden müßten. Daß man auf dieſe Art auch verſunkene Laſten aus dem Grundbette des Waſſers allmählich erheben könne, iſt ebenfalls leicht einzuſehen.

§. 28.

Damit ein ſchwimmender Körper im Gleichgewichte ſey, iſt das allein noch nicht hinreichend, daß das Gewicht der verdrängten flüſſigen Maſſe eben ſo groß ſey, als das ganze Gewicht des ſchwimmenden Körpers; ſondern es muß dabey auch ſeine Lage ſo beſchaffen ſeyn, daß der Schwerpunct des ganzen ſchwimmenden Körpers und der Schwerpunct der verdrängten flüſſigen Maſſe in einer und derſelben Vertical-Linie ſich befinden. Denn nur bey einer ſolchen Lage ſind die zwey Kräfte, das ganze Gewicht des ſchwimmenden Körpers und der Auftrieb, einander gleich und gerade entgegen geſetzt. Wenn ein ſchwimmender Körper in eine andere Lage verſetzet wird, wo die zwey angeführten Schwerpuncte in zwey verſchiedenen Vertical-Linien liegen; ſo wird ſolcher ſodann ſich ſelbſt überlaſſen

Fig. 14 durch die Umdrehung um ſeinen Schwerpunct eine ſolche Lage annehmen, daß der Schwerpunct der verdrängten flüſſigen Maſſe mit dem Schwerpuncte des ganzen ſchwimmenden Körpers in einer und derſelben Vertical-Linie ſich befindet. Der Körper wird eine zum Gleichgewichte erforderliche Lage annehmen, welches gemeiniglich erſt nach einigen Schwankungen geſchieht.

Es ſey z. B. Fig. 14 ein feſter Körper CED etwa eine Halbkugel in einer ſolchen Lage in eine flüſſige Maſſe eingetauchet, daß zwar das Gewicht p der verdrängten flüſſigen Maſſe AEBA dem Gewichte P des ganzen ſchwimmenden Körpers CEDC gleich ſey, der Schwerpunct g der verdrängten flüſſigen Maſſe aber etwas mehr links liege, als der Schwerpunct G des ganzen Körpers; ſo wird der freygelaſſene Körper in dieſer Lage nicht ruhen können, ſondern wird ſich um den Schwerpunct G ſo drehen, und eine ſolche Lage aEb annehmen, daß ſodann der Schwerpunct q der verdrängten flüſſigen Maſſe aEba mit dem Schwerpuncte G in einer und derſelben Vertical-Linie OGq lieget, welche auf dem Waſſerſchnitte ab bey dieſer Lage ſenkrecht ſeyn wird.

Die Kraft, welche einen ſolchen Körper um den Schwerpunct G dergeſtalt zu drehen ſtrebet, daß er im Stande des Gleichgewichtes von der horizontalen Waſſerfläche in ab geſchnitten wird, iſt nichts anders als der Auftrieb p, weil bey der Lage AEB deſſen mittlere Richtung pg nicht durch den Schwerpunct G durchgeht, und daher (wegen 3 Th. §. 142.) den feſten Körper um dieſen Schwerpunct G dergeſtalt zu drehen ſtrebet, daß ſich C erheben und D erniedrigen muß.

Auch iſt es leicht einzuſehen, daß zu einem ſtandhaften Gleichgewichte eines ſchwimmenden Körpers eben nicht unumgänglich nothwendig ſey, daß der Schwerpunct G des ganzen Körpers unter dem Schwerpuncte g der verdrängten flüſſigen Maſſe liege, wie im 24. §. bey einem ganz eingetauchten Körper; ſondern hier kann auch G oberhalb g lie-

liegen, ja es kann ſogar G ſich oberhalb der horizontalen Fig.
Oberfläche des Flüſſigen befinden. 14

Wenn man z. B. eine Halbkugel von der Beſchaffenheit annimmt, daß die Zone aCDb ſpecifiſch ſchwerer als der Abſchnitt aEb iſt, doch aber ihr ganzes Gewicht weniger beträgt, als das Gewicht einer eben ſo großen Halbkugel von Waſſer; und man tauchet ſodann eine ſolche Halbkugel ganz ins Waſſer: ſo wird ſie frey gelaſſen (wegen §. 24.) in einer ſolchen Lage in die Höhe ſteigen, daß die Kreisfläche CD unten ſeyn wird; auf der Oberfläche des Waſſers aber wird ſie im Stande des Gleichgewichtes eine entgegengeſetzte Lage annehmen.

§. 29.

Die Lage eines ſchwimmenden Körpers im Stande des Gleichgewichtes kann von dreyerley Beſchaffenheit ſeyn.

1) Standhaft, wenn der ſchwimmende Körper ſich wieder in die nähmliche Lage begibt, nachdem ſolcher um etwas Weniges um ſeinen Schwerpunct gedrehet worden iſt, z. B. eine mit der krummen Oberfläche eingetauchte Halbkugel von gleichförmiger Dichtigkeit.

2) Unſtandhaft oder ſchwankend, wenn der ſchwimmende Körper ſich weiter drehet, und eine andere Lage ſuchet, nachdem er etwas Weniges um ſeinen Schwerpunct gedrehet worden iſt, z. B. die nähmliche Halbkugel in verkehrter Lage.

3) Die Lage iſt gleichgültig, wenn der ſchwimmende Körper in der geänderten Lage noch immer im Gleichgewichte verbleibet, nachdem er um ſeinen Schwerpunct etwas gedrehet worden iſt, z. B. eine ſchwimmende volle, oder auch concentriſch ausgehöhlte Kugel von gleichförmiger Dichtigkeit.

Um bey einem gegebenen ſchwimmenden Körper im Stande des Gleichgewichtes die Beſchaffenheit der Lage zu unterſuchen, ob ſolche ſtandhaft, unſtandhaft oder gleichgültig ſey, zieht man eine Vertical-Linie EF Fig. 15 15
durch den Schwerpunct H des ſchwimmenden Körpers. Dieſe wird wegen des Gleichgewichtes auch durch den Schwer-

punct

Fig. 15 punct g des verdrängten Waſſers durchgehen, und auf dem Waſſerſchnitte AB ſenkrecht ſeyn. Sodann leget man eine Ebene CD durch den feſten Körper von der Beſchaffenheit, daß der körperliche Inhalt CED = AEB, und daß die Ebene CD gegen AB unter einem beliebigen nicht gar großen Winkel geneigt sey. Darauf beſtimmet man den Schwerpunct f des geometriſchen Raumes CED als den Schwerpunct des verdrängten Waſſers, wenn der feſte Körper bis CD eingetauchet iſt. Endlich zieht man aus f eine Senkrechte fG auf CD, und verlängert ſolche, bis ſie die vorige Gerade FE in irgend einem Puncte G durchſchneidet. Wenn fG mit FE nicht in einer und derſelben Ebene wäre; ſo leget man durch fG eine Ebene parallel zur Achſe, um welche die Drehung des ſchwimmenden Körpers geſchiehet um aus der Lage AEB in CED zu kommen.

Liegt nun der Schwerpunct des ſchwimmenden Körpers unter dieſem Durchſchnittspuncte G z. B. in H; ſo iſt die Lage AEB des ſchwimmenden Körpers ſtandhaft. Denn die Richtung des Auftriebes fG geht in einem ſolchen Falle bey der geänderten Lage CED dergeſtalt neben der Richtung MH des Gewichtes des ſchwimmenden Körpers vorbey, daß dieſer Auftrieb den Körper in die vorige Lage AEB zurück zu drehen ſtrebet, daß nähmlich A ſinken, und B ſteigen muß. Liegt aber der Schwerpunct des ſchwimmenden Körpers ober dem Durchſchnittspuncte G z. B. in F, ſo daß die Richtung FN des Gewichtes desſelben auf der Seite der tieferen Einſenkung neben der Richtung fG des Auftriebes vorbey gehe; ſo ſtrebet der Auftrieb den Körper noch weiter zu drehen, daß B noch tiefer einſinket, und A noch mehr emporſteiget. Die Lage des ſchwimmenden Körpers iſt daher in einem ſolchen Falle unſtandhaft. Iſt endlich der Schwerpunct des ſchwimmenden Körpers in dem Durchſchnittspuncte G befindlich; ſo iſt der Körper auch in dieſer zweyten Lage noch im Gleichgewichte. Wenn dieſes für jeden Winkel fGg oder AIC zutrifft, ſo iſt die Lage des Körpers gleichgültig.

Der Durchſchnittspunct G heißt in der Schiffbaukunſt

das Metacentrum oder der Obermittelpunct, weil dieſer Fig. Punct die Gränze iſt, unter welcher der Schwerpunct des 15 ſchwimmenden Körpers liegen muß, damit noch eine Standhaftigkeit des Gleichgewichtes vorhanden ſey. Bey einem leeren Segelſchiffe könnte es ſich fügen, daß der Schwerpunct desſelben zu nahe an das Metacentrum, oder gar über dasſelbe zu liegen käme. Um dieſes zu verhindern werden daher ſchwere Laſten, als Sand und dergleichen in den unterſten Theil des Schiffes unter dem Nahmen Ballaſt eingeladen.

§. 30.

Die Standhaftigkeit des Gleichgewichtes bey einem ſchwimmenden Körper RES in der Lage AEB, wo in H deſſen Schwerpunct, und in g der Schwerpunct des verdrängten Waſſers ſeyn mag, wird erkannt, wenn man das Moment derjenigen Kraft anzugeben weiß, welche bey einer gegebenen geänderten Lage CED (wo nun CD der horizontale Durchſchnitt auf der Oberfläche des Waſſers iſt) den ſchwimmenden Körper in die vorige Lage zurück zu drehen ſtrebet.

Dieſe Kraft iſt nichts anders als der Auftrieb des Waſſers, der jederzeit dem Gewichte des verdrängten Waſſers, und bey einem ſchwimmenden Körper auch dem ganzen Gewichte dieſes Körpers gleich iſt. Iſt nun f der Schwerpunct des verdrängten Waſſers CED; und daher fG ſenkrecht auf CD gezogen die mittlere Richtung des Auftriebes, und HM parallel zu fG die Richtung des Gewichtes des ſchwimmenden Körpers bey der geänderten Lage CED; ſo iſt die Senkrechte HK der Arm des Hebels, womit der Auftrieb den ſchwimmenden Körper in die vorige Lage AEB zurück zu drehen ſtrebet. Folglich iſt das Moment des Auftriebes oder die Standhaftigkeit des Gleichgewichtes gleich dem Producte aus dem Gewichte des ſchwimmenden Körpers oder des verdrängten Waſſers multipliciret mit der Senkrechten HK.

Dieſe Senkrechte HK läßt ſich aus der Vertiefung GH des Schwerpunctes H des ſchwimmenden Körpers unter

Fig. 15 ter dem Metacentrum G, und aus dem Neigungswinkel EGe = AIC beſtimmen, um welchen der ſchwimmende Körper aus ſeiner zum Gleichgewichte erforderlichen Lage durch was immer für eine Urſache nach der Seite geneigt angenommen wird. Dieſe Senkrechte HK, und daher auch die Standhaftigkeit eines und desſelben ſchwimmenden Körpers bey einem und demſelben Neigungswinkel iſt deſto größer, je tiefer der Schwerpunct H des ganzen ſchwimmenden Körpers unter dem Metacentrum G ſich befindet.

Wäre der ſchwimmende Körper eine Halbkugel, oder auch ein halber ausgehöhlter Cylinder an beyden Enden conoidiſch zugeſpitzet in Geſtalt eines Schiffes, wovon RES der ſenkrechte Querſchnitt, und EF deſſen verticale Achſe ſeyn mag (die nähmlich durch beyde Schwerpuncte g, H durchgeht, und auf der Oberfläche RS ſenkrecht ſteht) ſo liegt das Metacentrum in dem Mittelpuncte G des Halbkreiſes RES für jeden in dieſer Ebene RES angenommenen Neigungswinkel EGe = A'C. Sonſt iſt gemeiniglich die Stelle des Metacentrum für jeden anderen Neigungswinkel verſchieden.

§. 31.

Wie nun bey einem gegebenen ſchwimmenden Körper die Lage des Metacentrum durch Rechnung zu beſtimmen ſey (das iſt, wie die Linie Gg als die geſuchte Erhöhung des Metacentrum über den Schwerpunct des geometriſchen Raumes der verdrängten Flüſſigkeit durch Rechnung gefunden werden könne) gehöret zwar eigentlich in die Schiffbaukunſt; indeſſen erlaube ich mir doch etwas weniges hiervon zu erwähnen, und zwar Folgendes.

1) Bey der Beſtimmung des geſuchten Werthes von Gg wird der Winkel EGe = AIC = DIB, um welchen der ſchwimmende Körper mittelſt der Drehung um irgend eine horizontale Achſe, welche durch die Ebene RES in I ſenkrecht durchgehen mag, aus der zum Gleichgewichte erforderlichen Lage verrücket gedacht wird, gemeiniglich ſehr klein, eigentlich unendlich klein geſetzet. Ferner müſſen hierbey folgende Betrachtungen angeſtellet werden.

2) Der Durchſchnittspunct I von AB und CD liegt in der Mitte zwiſchen A und B: das iſt die Durchſchnittslinie des Waſſerſchnittes CD mit dem Waſſerſchnitte AB geht durch den Schwerpunct I des Waſſerſchnittes AB, wo in Fig. 16 dieſer horizontale Waſſerſchnitt durch ATBV, und die erwähnte Durchſchnittslinie als Umdrehungs- oder Schwankungsachſe betrachtet durch TV abgebildet iſt. Fig. 15 16

Denn wegen des kubiſchen Inhaltes des verdrängten Waſſers AEB = CED, iſt auch der ſpaltförmige Raum AIC = DIB, wo ſich jeder dieſer zwey ſpaltförmigen Räume (nach 3 Th. §. 137.) beſtimmen läßt. Wenn man nähmlich den ſehr kleinen Winkel AIC = DIB mit φ, die Fläche AI oder in Fig. 16. ATV mit A, die Fläche IB oder in Fig. 16. TVB mit B, ferner den Abſtand des Schwerpunctes der Fläche ATV von der Umdrehungsachſe TV mit a, und den Abſtand des Schwerpunctes der Fläche TVB von der nähmlichen Umdrehungsachſe TV mit b bezeichnet; ſo iſt (vermöge 3 Th. §. 137.) der kubiſche Inhalt des ſpaltförmigen Raumes AIC $= A . a\,\varphi$, und DIB $= B . b\,\varphi$, wo φ im Längenmaße für den Halbmeſſer = 1 ausgedruckt gedacht wird. Es iſt daher $A . a\varphi = B . b\varphi$, und folglich auch $A . a = B . b$; das iſt die ſtatiſchen Momente der zwey Flächen ATV und TBV in Abſicht auf die Durchſchnittslinie TV, ſie möge in dieſer horizontalen Ebene ATBV was immer für eine Lage haben, ſind ſeinander gleich; folglich liegt der gemeinſchaftliche Schwerpunct der Fläche ATBV in dieſer Durchſchnittslinie TV (3. Th. §. 132.)

3) Um nun die Erhöhung des Metacentrum G über den Schwerpunct g des verdrängten Waſſers zu berechnen muß man das Drehungsmoment (3. Th. §. 206.) des Waſſerſchnittes ATBV in Hinſicht auf eine ſolche durch den Schwerpunct I gehende Umdrehungsachſe TV berechnen, in welcher der Waſſerſchnitt AB von dem Waſſerſchnitte CD bey der geänderten Lage des ſchwimmenden Körpers durchſchnitten wird. Ein ſolches Drehungsmoment di-

vi-

Fig. vidiret durch den körperlichen Inhalt des verdrängten
15 Waſſers gibt die geſuchte Erhöhung gG des Metacen-
16 trum G über den Schwerpunct g des verdrängten
Waſſers für die angenommene Schwankungsachſe TV.

Man kann ſich davon auf folgende Art überzeugen.

Wenn G das Metacentrum, f der Schwerpunct des verdrängten Waſſers CED bey der geänderten Lage, und H der Schwerpunct des ganzen ſchwimmenden Körpers iſt; ſo iſt HK der Arm des Hebels, womit der Auftrieb $= P$ (24. §.) den ſchwimmenden Körper aus der geänderten Lage CED in die vorige zum Gleichgewichte erforderliche Lage AEB zurückzudrehen ſtrebet. Das Moment des Auftriebes, oder die Standhaftigkeit der Lage des ſchwimmenden Körpers iſt daher $= P. \mathrm{HK}$, oder auch $= P. \mathrm{GH}. \sin\varphi$, wegen $\mathrm{HK} = \mathrm{GH}. \sin\varphi$.

Eben dieſes Moment des Auftriebes läßt ſich noch auf eine andere Art ausdrucken. Wenn man nähmlich bey der aus dem Gleichgewichte verrückten Lage CED des ſchwimmenden Körpers den ſpaltförmigen Waſſerkörper AIC Fig. 15 in Gedanken hinzuſetzet, und wieder wegnimmt; ſo kann man auch ſagen, daß das nähmliche Moment des Auftriebes gleich ſey dem Momente von DIB, weniger dem Momente von AEB, mehr dem Momente von AIC in Hinſicht auf die Richtungslinie MHh, welche durch den Schwerpunct H des ſchwimmenden Körpers bey der Lage CED durchgeht. Weil nähmlich das negative Moment von AEB um das Moment von AIC zu groß genommen iſt; ſo muß letzteres, um den wahren Ausdruck zu erhalten, wieder mit dem Zeichen + hinzugeſetzet werden. Das Moment von AEB in Hinſicht auf Mh iſt $P. \mathrm{gr} = P. \mathrm{gH}. \sin\varphi$ wegen des rechten Winkels bey r. Wenn ferner 1 und 2 die Schwerpuncte der ſpaltförmigen kubiſchen Räume AIC, DIB ſind; ſo ſind die Momente dieſer zwey ſpaltförmigen Waſſerkörper $\frac{\mathrm{AIC}.P}{\mathrm{AEB}} \times \mathrm{Mp}$, und $\frac{\mathrm{DIB}.P}{\mathrm{AEB}} \times \mathrm{Mq}$, weil ſich das Gewicht ei-

nes ſolchen ſpaltförmigen Waſſerkörpers zum Gewichte P Fig.
des verdrängten Waſſers verhält, wie der Kubikinhalt des 15
erſtern zum Kubikinhalte AEB des verdrängten Waſſers. 16
Es iſt daher das Moment des Auftriebes P. GH. sin $\varphi =$

$$\frac{\text{AIC}.\ P.\ \text{Mp} + \text{DIB}.\ P.\ \text{Mq}}{\text{AEB}} - P.\text{gH}.\sin\varphi;$$

und daraus folgt GH + gH, nähmlich

$$\text{gG} = \frac{\text{AIC}.\text{Mp} + \text{DIB}.\text{Mq}}{\text{AEB}.\ \sin\varphi}.$$

Eben dieſer Werth für gG wird erhalten, wenn der Schwerpunct H des ſchwimmenden Körpers im Stande des Gleichgewichtes unter dem Schwerpuncte g des verdrängten Waſſers AEB befindlich wäre. Und nun kommt es darauf an, daß man die Momente AIC. Mp + DIB. Mq der zwey ſpaltförmigen Räume AIC und DIB in Hinſicht auf Mh gehörig ausdrucke, welches auf folgende Art geſchehen kann.

Es ſey auf dem Waſſerſchnitte AI Fig. 15 eine Abſciſſe von I gegen A genommen $= x$, nähmlich Fig. 16 auf dem Waſſerſchnitte ATVA ſey Im $= x$; die dazu gehörige ſenkrechte Ordinate auf dem nähmlichen Waſſerſchnitte ſey It $= y$; eben ſo ſey die Abſciſſe In $= X$, die dazu gehörige Ordinate rs $= Y$; und endlich ſey auf dem Waſſerſchnitte AB Fig. 15 der Abſtand IM $= \alpha$: ſo iſt ein Element oder das Differenziale des ſpaltförmigen Raumes AIC $= \text{d}x.\ x \sin\varphi.\ y$; weil man ſolches wegen des unendlich klein angenommenen Winkels φ für ein Prisma anſehen kann, welches das Rechteck $x \sin\varphi\ \text{d}x$ zum ſenkrechten Querſchnitte, und y zur Höhe hat. Das Moment dieſes Elementes in Hinſicht auf Mh iſt $= xy\,\text{d}x \sin\varphi \times (x - \alpha)$. Daraus folgt das Moment des ſpaltförmigen Raumes AIC. Mp $= \sin\varphi.\int x^2 y\,\text{d}x - \alpha.\int xy\,\text{d}x \sin\varphi$. Eben ſo iſt das Differenziale des ſpaltförmigen Raumes DIB $= XY\,\text{d}X \sin\varphi$; deſſen Moment in Hinſicht auf Mh $= XY\text{d}X \sin\varphi.\ (X + \alpha)$; und daher das Moment DIB. Mq $= \sin\varphi.\int X^2 Y\text{d}X + \alpha\int XY\text{d}X \sin\varphi$. Folglich iſt

AIC,

Fig. $AIC. Mp + DIB. Mq = (\int x^2 y dx + \int X^2 Y dX) \sin \phi$
15 $- \alpha (\int xy dx \sin \varphi - \int XY dX \sin \phi)$.
16 Nun heben die letzten zwey Glieder einander gänzlich auf, weil $\int xy dx \sin \varphi$ der Inhalt des ſpaltförmigen Raumes AIC, und $\int XY dX \sin \varphi$ des Raumes DIB iſt, für $x = IA$, und $X = IB$, welche einander gleich ſind. Daher iſt auch $AIC. Mp + DIB. Mq = (\int x^2 y dx + \int X^2 Y dX). \sin \varphi$.

Wird nun dieſer Werth in die oben für gG angegebene Gleichung eingeführet: ſo iſt endlich

$$gG = \frac{\int x^2 . y dx + \int X^2 . Y dX}{AEB}$$

wo (vermöge 3. Th. §. 206.) der Zähler nichts anders iſt, als das Drehungsmoment des Waſſerſchnittes TBVA in Hinſicht auf die angenommene Schwankungsachſe TV; der Nenner aber iſt der kubiſche Inhalt des verdrängten Waſſers.

Wie nun für verſchiedene ebene Flächen als Waſſerſchnitte betrachtet, die Drehungsmomente zu berechnen ſind in Hinſicht auf verſchiedene Schwankungsachſen, die durch den Schwerpunct des Waſſerſchnittes gehen, erhellet aus 3. Th. §. 207. Die weitere Ausführung dieſer Unterſuchung, und die Anwendung derſelben auf die Schiffbaukunſt findet man in Hrn. *L. Euler* Theorie complette de la constr. des vaiss. Paris. 1776.

4) Indeſſen iſt doch auch ſchon aus dem Angeführten abzunehmen, worauf man überhaupt zu ſehen habe, um einem Schiffe eine große Standhaftigkeit des Gleichgewichtes auf dem Waſſer zu verſchaffen. Es muß nähmlich zu dieſer Abſicht die Figur des Schiffes ſo beſchaffen ſeyn, daß für jede Schwankungsachſe das Metacentrum ſo hoch als möglich über den Schwerpunct des verdrängten Waſſers zu liegen komme. Ferner muß die ganze Laſt dergeſtalt vertheilet werden, daß der gemeinſchaftliche Schwerpunct des ganzen Schiffes ſammt der Ladung ſo tief als möglich unter dem Metacentrum ſich befinde.

§. 32.

§. 32. Fig.

Da vermöge 21. §. ein feſter Körper, wenn er in eine ſchwere flüſſige Maſſe ganz eingetaucht wird, wegen des von allen Seiten gegen ſeine Oberfläche fortgepflanzten Druckes einen lothrechten Auftrieb (22. §.) von unten nach oben leidet, der dem Gewichte der verdrängten flüſſigen Maſſe gleich iſt; ſo iſt es offenbar, daß das Sinken eines ſpecifiſch ſchwereren feſten Körpers im Waſſer verhindert werden könne, wenn ſolcher mit einer Gewalt gehalten wird, die der Differenz der Gewichte des eingetauchten Körpers und des verdrängten Waſſers gleich iſt; oder welches einerley iſt, daß das mittelſt einer Wage beſtimmte Gewicht eines ſolchen Körpers in der flüſſigen Maſſe genau um das Gewicht des verdrängten Flüſſigen kleiner ſeyn müſſe, als deſſen Gewicht außerhalb der flüſſigen Maſſe iſt. Eben ſo kann das Steigen eines ganz eingetauchten feſten Körpers von ſpecifiſch leichterer Art (25. §.) im Waſſer verhindert werden, wenn ſolcher mit einer Gewalt, die ebenfalls der Differenz der Gewichte des verdrängten Waſſers und des eingetauchten Körpers gleich iſt, hinunter gezogen wird. Dieſer Umſtand rechtfertiget die Redensart: **Jeder feſte Körper, wenn er in eine ſchwere flüſſige Maſſe ganz eingetaucht wird, verliert von ſeinem Gewichte ſo viel, als die verdrängte flüſſige Maſſe wiegt; oder ſo viel als das Gewicht der flüſſigen Maſſe unter einem mit dem feſten Körper gleich großen Kubikinhalte beträgt. Ein Körper, deſſen Gewicht kleiner iſt, als das Gewicht des Waſſers unter einerley Umfange, verliert daher bey der gänzlichen Eintauchung in dasſelbe an ſeinem Gewichte mehr, als er wirklich hat.**

Es iſt nähmlich der Gewichtsverluſt (als das Gewicht des verdrängten Waſſers oder der Auftrieb) eines feſten Körpers bey deſſen gänzlicher Eintauchung in eine flüſſige Maſſe gleich der Differenz der Gewichte, welche dieſer Körper im Freyen und in der flüſſigen Maſſe äußert, wenn jener dichter als dieſe iſt. Wenn hingegen die flüſſige

Maſ-

Fig. Maſſe dichter iſt, als der eingetauchte feſte Körper; ſo iſt deſſen Gewichtsverluſt darin gleich der Summe der Gewichte des feſten Körpers im Freyen und in der flüſſigen Maſſe; weil das Gewicht des feſten Körpers in der flüſſigen Maſſe hier in entgegen geſetzter Richtung, nähmlich aufwärts wirket.

Auch hat der erwähnte Auftrieb zu der uneigentlichen Redensart Veranlaſſung gegeben: Waſſer iſt im Waſſer nicht ſchwer. Wenn man nähmlich in einem mit Waſſer angefüllten Gefäße ein Theilchen des Waſſers nach Belieben groß oder klein in Erwägung zieht; ſo wird deſſen Gewicht von dem eben ſo großen und gerade entgegen geſetzten Auftriebe gänzlich aufgehoben; und iſt in Abſicht auf das Sinken eben ſo viel, als wenn das ganze Waſſer der Wirkung der Schwerkraft gar nicht ausgeſetzt wäre. Dabey iſt aber doch ein weſentlicher Unterſchied zwiſchen dem in einem Gefäße ruhenden ſchweren, und unſchweren Waſſer. Bey jenem leidet jedes Theilchen von allen Seiten her einen fortgepflanzten Druck, der ſich nach 14. §. n. 1. beſtimmen läßt; bey dieſem hingegen wäre kein einziges Theilchen weder am Boden des Gefäßes noch ſonſt an irgend einer Stelle einer Zuſammendrückung ausgeſetzt. Bey einem feſten Körper, wenn ſolcher durch irgend eine feſte Unterlage gegen die Erde herabzuſinken verhindert wird, iſt auch das Gewicht durch die Feſtigkeit der Unterlage gänzlich aufgehoben; dabey pflegt man aber doch nicht zu ſagen, der Körper ſey in einem ſolchen Falle nicht ſchwer.

§. 33.

Wenn man ein mit Waſſer gefülltes Gefäß auf eine Wagſchale ſtellet, und die Wage mit einem Gegengewichte ins Gleichgewicht ſetzet, ſodann aber einen feſten Körper mittelſt eines Fadens, ohne die Wage und die Wände des Gefäßes zu berühren in das Waſſer eintauchet, ſo wird das Gleichgewicht nicht mehr beſtehen. Das Gefäß drücket nun ſtärker auf die Wagſchale; und zwar genau um dasjenige Gewicht, welches der eingetauchte Körper im Waſſer verlieret, oder um das Gewicht des verdrängten Waſſers. Wenn man daher auf die andere Wagſchale ein

dem

dem verdrängten Waſſer gleich groſzes Gewicht leget, ſo Fig.
wird das Gleichgewicht wieder hergeſtellet. Schneidet man ſodann bey einem ganz eingetauchten Körper von ſpecifiſch ſchwererer Art den Faden an der Waſſerfläche ab, ſo wird dieſes Gleichgewicht noch ferner beſtehen, jedoch nur ſo lange, als das Sinken eines ſolchen Körpers dauert. Sobald aber der Körper auf dem Boden des Gefäßes aufliegt, wird das Gleichgewicht wieder geſtöret. Um ſolches herzuſtellen muß man zu dem vorigen Gewichte, das dem verdrängten Waſſer gleich iſt, noch ein anderes von ſolcher Beſchaffenheit hinzulegen, das dieſe beyde zuſammen dem Gewichte des eingetauchten Körpers gleich ſind.

Die Urſache dieſes Erfolges iſt leicht einzuſehen. Wenn nähmlich der ganz eingetauchte Körper mit dem Waſſer einerley ſpecifiſches Gewicht hätte, ſo wäre es eben ſo viel, als wenn ſtatt deſſen eine Menge Waſſer von eben ſo groſzem kubiſchen Inhalte hinzugegoſſen würde; wodurch denn der Druck des Gefäßes gegen die Wagſchale (wegen 20. §) um das Gewicht eben dieſes Waſſers vermehret wird. Allein wenn der eingetauchte Körper auch ſpecifiſch ſchwerer iſt als Waſſer; ſo iſt doch der Erfolg noch eben ſo beſchaffen, weil der Gewichtsüberſchuß des eingetauchten Körpers über das Gewicht des verdrängten Waſſers mittelſt des Fadens von der Hand oder einer anderen Befeſtigung außerhalb der Wage getragen wird, und dadurch ſo aufgehoben iſt, daß er auf die Wage gar nicht wirken kann. Man kann ſich hiervon auch noch beſſer überzeugen, wenn man um einen ſo eingetauchten feſten Körper ſich eine lothrechte Waſſerſäule von der Oberfläche des Waſſers bis zum Boden des Gefäßes gleichſam in Geſtalt einer angefüllten Röhre vorſtellet, und ſodann den verticalen Druck gegen den Boden des Gefäßes bey einer ſolchen mit Waſſer und mit dem feſten Körper angefüllten Röhre eben ſo wie im 20. §. Fig. 10, und 21. §. Fig. 11 beſtimmet. Wird nun der Faden abgeſchnitten, ſo ſinket zwar der eingetauchte Körper ſchwererer Art wegen des Ueberſchuſſes ſeines Gewichtes über das Gewicht des verdrängten Waſſers; er kann aber doch während

des

Fig. des Sinkens auf die Wagſchale noch keinen Druck ausüben, weil das Waſſer als eine flüſſige Maſſe dem dagegen angebrachten Drucke nach 1. §. ausweichet. Sobald aber der Körper auf dem Boden des Gefäßes aufliegt; ſo drückt er mit dem erwähnten Ueberſchuſſe ſeines Gewichtes den feſten Boden des Gefäßes, und hiermit auch die Wagſchale.

Während des Sinkens leidet zwar die untere Fläche des eingetauchten Körpers einen gewiſſen Widerſtand, wovon weiter unten umſtändlich gehandelt wird; es entſteht nähmlich ſowohl gegen die untere Fläche des ſinkenden Körpers als auch gegen die jedesmahlige angränzende Waſſerſchichte wegen der Abſtoßungskräfte der Materie (3. Th. §. 59.) eine gewiſſe Preſſung, welche verurſachet, daß das Sinken nicht genau nach den Geſetzen der gleichförmig beſchleunigten Bewegung geſchieht, ſondern daß die Beſchleunigung (3 Th §. 48.) nach einem gewiſſen Geſetze immer mehr und mehr abnimmt, je größer die bereits durch das Sinken erlangte Geſchwindigkeit wird. Allein dieſe Preſſung wirket gar nicht auf die Wagſchale. Der Erfolg iſt beynahe eben ſo wie in dem Falle, da man zwey auf einander gelegte Körper, (z. B. zwey Würfel) deren über einander liegende Flächen eine dazwiſchen angebrachte elaſtiſche Feder aus einander zu treiben ſich beſtrebet, auf eine Wagſchale ſtellet, und mit einem Gegengewichte ins Gleichgewicht ſetzet. Dieſe zwey Körper, und die elaſtiſche Feder müſſen bey dem nähmlichen Gegengewichte immer im Gleichgewichte verbleiben, es möge die elaſtiſche Kraft der zwiſchenliegenden Feder bey ungeänderter Maſſe gegen dieſe zwey Körper ſtärker oder ſchwächer wirken. Die Wagſchale leidet keinen anderen Druck, als das Gewicht der zwey Körper und der Feder, als bloß ſchwerer Maſſen.

Aus den bisher angeführten Gründen iſt auch folgender Erfolg leicht zu erklären. Wenn man ein mit Waſſer angefülltes Gefäß auf einer Wagſchale ins Gleichgewicht ſetzet, und ſodann mit einem Stabe oder einem anderen feſten Körper von oben gegen die Oberfläche des Waſſers

der-

dergeſtalt herunter ſtößt, daß ſich der feſte Körper etwas eintauchet; ſo wird das Gleichgewicht geſtöret, obwohl im 1. §. geſagt worden iſt, daß eine flüſſige Maſſe einem dagegen angebrachten Drucke ausweicht. Die Urſache, warum hier das Gleichgewicht geſtöret wird, iſt bloß dieſe, weil durch das Eintauchen des feſten Körpers der Druck des mit ſchwerem Waſſer angefüllten Gefäßes gegen die Wagſchale genau um das Gewicht des verdrängten Waſſers vermehret wird; der von dem Stoße herrührende Druck kann in dieſem Falle auf die Wagſchale gar nicht wirken. Wenn das Waſſer nicht ſchwer wäre, oder wenn man in einem Gewölbe mitten in der Erdkugel auf dieſe Art ein Gefäß mit Waſſer auf die Schale einer Wage ſtellen könnte; ſo dürfte das Gleichgewicht nicht geſtöret werden, man möge auf die angeführte Art wie immer gegen einen Theil der offenen Oberfläche des Waſſers ſtoßen. Nur damahls, wenn man in einem ſolchen Falle gegen die ganze offene Oberfläche des Waſſers mit einem genau paſſenden Stämpel ſtößt oder drücket, wird auch die Wagſchale den Druck empfinden. Fig.

IV. Abſchnitt.

Hydroſtatiſche Abwägung und Ausmeſſung der Körper.

§. 34.

Das eigenthümliche oder ſpecifiſche Gewicht eines Körpers, oder vielmehr der Materie oder des Stoffes, woraus die für gleichförmig dicht angenommene Maſſe des Kör-

Fig. Körpers beſteht, iſt bekannter Maßen nichts anders, als das wirkliche Gewicht eines für die Einheit angenommenen Theiles (z. B. eines kubiſchen Fußes oder Zolles) dieſes Körpers. Daß man aus dem für bekannt angenommenen, oder nach den Gründen der Geometrie ausgemeſſenen kubiſchen Inhalte eines Körpers, und aus deſſen mittelſt einer genauen Wage beſtimmten Gewichte ſein eigenthümliches Gewicht berechnen könne, iſt (vermöge 3. Th. § 15.) bereits bekannt. Wenn nähmlich der kubiſche Inhalt des Körpers $= V$, ſein ganzes oder abſolutes Gewicht $= P$, und ſein eigenthümliches Gewicht $= Q$ iſt; ſo iſt $Q = \frac{P}{V}$ wegen $V : 1 = P : Q$; woraus auch $P = QV$, und $V = \frac{P}{Q}$ folget.

Eben ſo kann man auch das eigenthümliche Gewicht $= q$ einer flüſſigen Maſſe finden, wenn man den kubiſchen Inhalt eines Gefäßes (nähmlich deſſen leeren Raum $= v$) ausmißt, darauf dieſen mit der flüſſigem Maſſe anfüllet, und mittelſt einer genauen Wage das Gewicht der letzteren $= p$ beſtimmet; denn daraus folgt wie ehevor $q = \frac{p}{v}$.

§. 35.

Es iſt bereits allgemein eingeführet das eigenthümliche Gewicht des Regenwaſſers (als einer allerorts leicht zu habenden Maſſe von gleichförmiger Dichtigkeit) für die Einheit anzunehmen, nähmlich ſolches $= 1$ zu ſetzen, und durch dieſe Einheit die eigenthümlichen Gewichte anderer ſowohl feſter als auch flüſſiger Körper zu beſtimmen; und zwar durch gewiſſe Zahlen, welche angeben, wie vielmahl das eigenthümliche Gewicht des Waſſers im eigenthümlichen Gewichte ſolcher Körper enthalten ſey. In dieſem Sinne pflegt man daher auch öfters zu ſagen: das eigenthümliche oder ſpecifiſche Gewicht einer vorgelegten Maſſe iſt diejenige Zahl, welche angibt, wie vielmahl das eigenthümliche Gewicht des Regenwaſſers im eigenthüm-

thümlichen Gewichte der vorgelegten Maſſe enthalten Fig.
iſt. Es wäre beſſer, um die Zweydeutigkeit zu vermeiden, ſolchen Zahlen eine andere Benennung zu geben, z. B. relative Dichtigkeit, oder glattweg die Dichtigkeit der Körper; man könnte ſie auch Dichtigkeitszeiger, Gewichtszeiger, auch Gewichts-Exponenten heißen. Damit ich nicht neue Benennungen aufdringe, dabey aber doch die Zweydeutigkeit vermeide, ſo will ich in der Folge für ſolche Zahlen immer fort die in ſehr vielen Schriften bereits eingeführte Benennung ſpecifiſche Schwere (gravitas specifica), zuweilen auch relative Dichtigkeit beybehalten. Das eigenthümliche Gewicht eines Körpers aber ſoll auch in der Folge wie bisher die Bedeutung des 34 §. haben.

§. 36.

Da nun feſtgeſetzet iſt, daß die ſpecifiſche Schwere (gravitas specifica) oder die relative Dichtigkeit einer vorgelegten Maſſe diejenige Zahl ſey, welche angibt, wie oft das eigenthümliche Gewicht des Regenwaſſers im eigenthümlichen Gewichte der vorgelegten Maſſe enthalten iſt; ſo iſt es nun leicht aus dem für bekannt angenommenen eigenthümlichen Gewichte des Regenwaſſers und aus der gegebenen ſpecifiſchen Schwere einer vorgelegten Maſſe das eigenthümliche Gewicht der letzteren zu beſtimmen. Wenn nähmlich das eigenthümliche Gewicht des Regenwaſſers $= q$, und die ſpecifiſche Schwere einer vorgelegten Maſſe $= n$ iſt; ſo iſt deren eigenthümliches Gewicht, wenn ſolches mit Q bezeichnet wird $Q = nq =$ dem eigenthümlichen Gewichte des Regenwaſſers multipliciret mit der ſpecifiſchen Schwere der vorgelegten Maſſe, weil vermöge der feſtgeſetzten Bezeichnung und Benennung $n = \frac{Q}{q}$ iſt. Wäre die ſpecifiſche Schwere eben dieſes Körpers in Abſicht auf eine andere Flüſſigkeit gegeben, und das eigenthümliche Gewicht dieſer Flüſſigkeit wäre ebenfalls bekannt (es ſey jene $= N$ und dieſes $= R$); ſo iſt das geſuchte eigenthüm-

Fig. liche Gewicht Q eines ſolchen Körpers ebenfalls $Q = N.R$, weil N die Bedeutung $\frac{Q}{R}$ hat.

§. 37.

Die Dichtigkeit des Regenwaſſers, ſo wie eines jeden anderen Körpers, wird durch die Wirkung der Wärme geändert. Alle Körper werden nähmlich bey vermehrter Wärme mehr ausgedehnet, und bey der Verminderung der Wärme oder bey der Kälte zuſammengezogen; jedoch einige um etwas mehr als andere, z. B. Meſſing und Eiſen in einem Verhältniſſe beyläufig von 17 zu 10. Die Dichtigkeiten der Körper und ihre eigenthümlichen Gewichte werden bey vermehrter Wärme kleiner, und bey verminderter Wärme größer; nur ihre abſoluten Gewichte bleiben ungeändert, weil der hinzugetretene, die Empfindung der Wärme bewirkende, ſo genannte Wärmeſtoff ſo fein ſeyn ſoll, daß man ſein Gewicht gar nicht wahrnehmen kann. Deßwegen iſt es in Fällen von großer Genauigkeit erforderlich das eigenthümliche Gewicht des Regenwaſſers bey einer mittleren Temperatur, etwa bey der Wärme von 10 Graden des Reaumürſchen Queckſilber-Thermometers durch einen ſorgfältig abgeführten Verſuch zu beſtimmen, und die ferneren Verſuche zur Erforſchung der ſpecifiſchen Schwere oder der relativen Dichtigkeit verſchiedener Körper bey einer eben ſolchen mittleren Temperatur anzuſtellen.

§. 38.

Das eigenthümliche Gewicht des Regenwaſſers ließe ſich zwar nach dem 34. §. mittelſt eines Gefäßes vom bekannten kubiſchen Inhalte (z. B. mittelſt eines genau ausgehöhlten wirklichen Kubikfußes oder auch Kubikzolles) beſtimmen. Allein wegen der Anziehung oder Abſtoßung der Elementar-Theilchen der Wände des Gefäßes und des Waſſers iſt es mißlich einen ſolchen kubiſchen Inhalt mit Waſſer völlig genau auszufüllen. Deßwegen iſt es vortheilhafter das eigenthümliche Gewicht des Regenwaſſers mittelſt

der

der Eintauchung eines feſten Körpers zu beſtimmen, und zwar auf folgende Art. Fig.

Man nehme einen feſten Körper vom bekannten kubiſchen Inhalte, etwa einen metallenen Würfel, oder lieber einen Cylinder (weil der Cylinder leichter genau zu verfertigen iſt als der Würfel), und wäge ſolchen ſowohl außer dem Waſſer, als auch im Regenwaſſer mittelſt einer ſehr genauen und empfindlichen Wage. Im letzteren Falle kann man denſelben mittelſt eines Pferdehaares an die Wagſchale befeſtigen. Man wählet hierzu gern Pferdehaare, weil ſie mit dem Waſſer ſehr nahe einerley ſpecifiſche Schwere haben, da man ſodann nur den aus dem Waſſer hervorragenden Theil des Pferdehaares mit einem Gegengewichtchen ins Gleichgewicht ſetzen muß. Die Differenz der Gewichte eines ſolchen Körpers in und außer dem Waſſer iſt nun das Gewicht, welches der eingetauchte feſte Körper im Waſſer verlieret, und (wegen 32. §.) zugleich das Gewicht des Waſſers unter einem mit dem eingetauchten feſten Körper gleich großen Kubikinhalte. Wenn nähmlich das Gewicht des feſten Körpers außer dem Waſſer $= P$, das Gewicht des Waſſers unter einem mit dem feſten Körper gleich großen Kubikinhalte $= p$, und die Kraft, womit dieſer ganz eingetauchte feſte Körper zu ſinken ſtrebet, nähmlich deſſen Gewicht im Waſſer $= Q$ iſt; ſo iſt (wegen 32. §.) $Q = P - p$, und daher $p = P - Q$ wo $P - Q$ dasjenige Gewicht heißt, welches der Körper im Waſſer verliert. Aus dieſem ſo gefundenen Gewichte des verdrängten Waſſers läßt ſich ſodann das Gewicht eines Kubikfußes oder Kubikzolles, als das geſuchte eigenthümliche Gewicht des Regenwaſſers durch folgende Proportion ableiten: Der bekannte kubiſche Inhalt des eingetauchten feſten Körpers verhält ſich zu 1 Kubikfuß oder Kubikzoll, gleich wie das gefundene Gewicht des Regenwaſſers unter dem nähmlichen Kubikinhalte zu dem Gewichte eines Kubikfußes oder Kubikzolles desſelben. Auf dieſe Art findet man, daß ein Wiener-Kubikfuß des unter

frepem

Fig. freyem Himmel aufgefangenen Regenwaſſers bey der Temperatur von 5 Reaumürſchen Graden ſehr nahe $56\frac{3}{8}$ Pfunde des Wiener-Handelsgewichtes wiege. Ein Pariſ. Kubikfuß des nähmlichen Regenwaſſers wiegt ſehr nahe 70 Pariſ. Pfund.

Bey einer von Hrn. Profeſſor Jacquin dem jüngern zu Wien 1799 in der Abſicht vorgenommenen Unterſuchung war das Gewicht eines metallenen Cylinders von 1 Zoll im Durchmeſſer und 2 Zoll hoch (des W. F.) in freyer Luft 3431,8 Gran, und deſſen Gewichtsverluſt im deſtillirten Waſſer bey + 5 Grad des 80 theiligen Queckſilber-Thermometers, und bey $28\frac{1}{8}$ Wien. Zoll Barometer-Höhe 393,6 Gran des Wiener-Apothekergewichtes; woraus das Gewicht eines Wiener-Kubikfußes des deſtillirten Waſſers = 56 Pfund 12 Loth 31 Gran, alſo ſehr nahe $56\frac{3}{8}$ Pfund folget.

Auf die angeführte Art läßt ſich auch das eigenthümliche Gewicht einer jeden andern Flüſſigkeit beſtimmen, worin der eingetauchte feſte Körper vom bekannten kubiſchen Inhalte, ohne aufgelöſet zu werden, zu Boden ſinken kann.

Bey der Unterſuchung des eigenthümlichen Gewichtes verſchiedener Waſſer findet man, daß nicht alle Arten des gemeinen Waſſers, als Regenwaſſer, Brunnenwaſſer, Flußwaſſer, u. d. gl. einerley eigenthümliches Gewicht haben. Daher wählte man das Regen- oder Schneewaſſer, um die eigenthümlichen Gewichte der übrigen Maſſen damit zu vergleichen, weil man es für das reinſte hält. Es muß aber ſolches, um es deſto reiner zu erhalten, nicht von den Dächern, ſondern unter freyem Himmel aufgefangen werden. Um es von einigen fremden Theilchen, die etwa noch demſelben beygemiſchet ſind, zu reinigen, kann man ſolches durch eine feine Leinwand filtriren, und ſodann auskochen. Will man es noch reiner haben ſo muß man ſolches deſtilliren, oder wenn man hierzu nicht ſelbſt eingerichtet iſt, dasſelbe in einer Apotheke deſtilliren laſſen. Weiter unten (im 41. und 43. §.) wird eine ſehr leichte Anweiſung folgen um den Gewichtsverluſt eines feſten Körpers in einer flüſſigen Maſſe zu beſtimmen.

§. 39.

§. 39. Fig.

Iſt einmahl das eigenthümliche Gewicht des Waſſers oder einer anderen Flüſſigkeit bekannt, ſo läßt ſich ſodann der kubiſche Inhalt eines jeden hineingetauchten feſten Körpers (wenn ſolcher von der Beſchaffenheit iſt, daß er weder vom Waſſer aufgelöſet wird, noch auch die Waſſertheilchen in ſeine Zwiſchenräume merklich aufnimmt) mittelſt des zu erforſchenden Gewichtes beſtimmen, welches ein ſolcher Körper im Waſſer verliert; und zwar durch folgende Regel: **Der Gewichtsverluſt des auszumeſſenden Körpers im Waſſer dividirt durch das eigenthümliche Gewicht des Waſſers gibt den geſuchten Kubikinhalt des Körpers.**

Denn da (wegen 32. §.) der Gewichtsverluſt des eingetauchten Körpers dem Gewichte des verdrängten Waſſers gleich iſt, und dieſes mit dem eingetauchten Körper einerley Kubikinhalt hat; ſo verhält ſich das eigenthümliche Gewicht des Waſſers (als das Gewicht eines Kubikfußes oder Kubikzolles) zu dem beobachteten Gewichtsverluſte des eigetauchten feſten Körpers (als dem Gewichte des verdrängten Waſſers), gleich wie ein Kubikfuß oder Kubikzoll zum geſuchten kubiſchen Inhalte des eingetauchten feſten Körpers (als dem Inhalte des verdrängten Waſſers) in Kubikfuß- oder Kubikzoll-Maße ausgedruckt. Daraus läßt ſich ſodann aus dem bekannten Gewichte eines ſolchen Körpers und aus deſſen eben gefundenem kubiſchen Inhalte ſein eigenthümliches Gewicht (nach 34. §.) ableiten. Auf dieſe Art iſt es ſehr leicht das eigenthümliche Gewicht der Eiſen-Munition von verſchiedenen Gußwerken, wie auch des Stuckmetalles, und anderer feſter Körper zu beſtimmen. Iſt nun der feſte Körper, deſſen Kubikinhalt auf dieſe Art hydroſtatiſch geſucht wird, von ſpecifiſch ſchwererer Art als Waſſer; ſo iſt die Erforſchung des im Waſſer verlornen Gewichtes weiter keiner Schwierigkeit ausgeſetzt.

§. 40.

Iſt aber der feſte Körper, deſſen Kubikinhalt hydroſtatiſch geſucht wird, von ſpecifiſch leichterer Art als Waſſer;

Fig. ſer; ſo muß derſelbe an einen andern Körper von beträchtlich ſchwererer Materie auf eine ſolche Art angebunden werden, daß ſodann beyde mit einander vereiniget im Waſſer zu Boden ſinken können. Der ſpecifiſch leichtere Körper kann z. B an einen Bleyklumpen mit Eiſendrath angebunden werden. Sodann unterſucht man mittelſt der Wage 1) das Gewicht, welches beyde vereinigte Köper zuſammen im Waſſer verlieren, 2) das Gewicht, welches der Hülfskörper ſchwererer Art im Waſſer verliert. 3) Die Differenz dieſer zwey verlornen Gewichte iſt nun das Gewicht des von dem ſpecifiſch leichteren feſten Körper verdrängten Waſſers, welches am kubiſchen Inhalte dieſem feſten Körper gleich iſt. Daraus ergibt ſich nun der geſuchte Kubikinhalt dieſes Körpers, wenn man dieſes ſo beſtimmte Gewicht des verdrängten Waſſers durch das eigenthümliche Gewicht des Waſſers dividiret. Wenn nähmlich daß im Waſſer verlorne Gewicht der zwey vereinigten Körper $= P$, und das verlorne Gewicht des Hülfskörpers $= p$ iſt; ſo iſt das verlorne Gewicht Q des auszumeſſenden Körpers $Q = P - p$. Denn es iſt (wegen 32. §.) $P = Q + p$; und daher $Q = P - p$.

§. 41.

Auf folgende Art wird der Gewichtsverluſt eines feſten Körpers in einer flüſſigen Maſſe, er mag nun ſpecifiſch ſchwerer oder leichter ſeyn, als dieſe flüſſige Maſſe, wenn er nur nicht zu groß iſt, noch kürzer gefunden.

1) An die eine Wagſchale einer genauen Wage hänge man den Hülfskörper an, tauche ſolchen in das darunter geſtellte Flüſſige gehörig ein, und bringe ihn mit einem beliebigen Gegengewichte auf der anderen Wagſchale (z. B. mit Bleyſchrotte oder klarem Sande) ins Gleichgewicht.

2) Sodann lege man den zu unterſuchenden feſten Körper auf die Wagſchale, von welcher der Hülfskörper in das flüſſige herunter hängt, und bringe die andere Wagſchale mittelſt Auflegung der erforderlichen Theile eines Gewichtseinſatzes mit demſelben ins Gleichgewicht. Dieſe Gewichtstheile ſind nun das abſolute Gewicht des zu unterſuchen=

ſuchenden Körpers, oder ſein Gewicht im Freyen, eigentlich in der Luft. Fig.

3) Darauf nehme man den zu unterſuchenden Körper von der Wagſchale wieder weg, verbinde ihn mit dem eingetauchten Hülfskörper mittelſt der ſchon dabey befindlichen Vorrichtung, und lege nun auf eben dieſe Wagſchale ſo viele Theile eines Gewichtseinſatzes, bis wieder das Gleichgewicht hergeſtellet iſt; ſo ſind dieſe Theile der geſuchte Gewichtsverluſt des zu unterſuchenden Körpers, oder das Gewicht des von ihm verdrängten Flüſſigen. Auf dieſe Art kann man auch den Gewichtsverluſt (im 38. §.) bey der Erforſchung des eigenthümlichen Gewichtes verſchiedener Flüſſigkeiten, ſo wie auch im 39. §. und in allen ähnlichen Fällen ſehr leicht beſtimmen.

§. 42.

Mittelſt des bekannten eigenthümlichen Gewichtes des Waſſers läßt ſich auch die innere Aushöhlung eines waſſerhaltenden Gefäßes, z. B. einer gläſernen Flaſche, einer irregulär ausgehöhlten Kugel, u. m. d. gl. im Kubikmaße angeben. Man muß zu dieſer Abſicht ſowohl das leere, als auch das mit Waſſer angefüllte Gefäß genau abwägen, und dieſe zwey Gewichte von einander abziehen, um das Gewicht des Waſſers zu erhalten, welches die auszumeſſende Aushöhlung genau ausfüllet. Man kann auch das Waſſer, wenn deſſen gar viel ſeyn ſollte, abgießen, und ſolches theilweiſe abwägen. Sodann ergibt ſich der geſuchte Kubikinhalt, wenn man das gefundene Gewicht des Waſſers mit deſſen eigenthümlichem Gewichte dividiret.

§. 43.

Wenn einmahl das eigenthümliche Gewicht des Regenwaſſers (nach 38. §.) richtig gefunden worden iſt; ſo iſt zur Beſtimmung der eigenthümlichen Gewichte anderer ſowohl feſter als flüſſiger Maſſen (nach 36. §.), nur noch erforderlich deren ſpecifiſche Schweren oder relative Dichtigkeiten ausfindig zu machen. Dieſes kann auf folgende Art geſchehen.

1)

Fig. 1) Ein Stück eines feſten Körpers von gleichförmiger Dichtigkeit, deſſen ſpecifiſche Schwere (36. §.) oder relative Dichtigkeit geſucht wird, wiegt man zu erſt ſehr genau in freyer Luft um das abſolute Gewicht dieſes Stückes zu erhalten. Sodann beſtimmt man (nach 41. §.) dasjenige Gewicht, welches eben dieſes Stück im Regenwaſſer verliert. Dieſes Gewicht iſt nun zugleich das Gewicht einer Menge Waſſers, die mit dem eingetauchten feſten Körper einerley kubiſchen Inhalt hat (32. §.). Nun dividire man das abſolute Gewicht durch den Gewichtsverluſt im Regenwaſſer, ſo iſt der Quotient die geſuchte ſpecifiſche Schwere des Körpers in der Bedeutung des 36. §. Denn wenn der kubiſche Inhalt des beym Abwägen gebrauchten Stückes $= V$, deſſen abſolutes Gewicht $= P$, deſſen Gewichtsverluſt im Regenwaſſer $= R$, und das eigenthümliche Gewicht des Körpers $= Q$ iſt, des Regenwaſſers eigenthümliches Gewicht aber $= q$, und die geſuchte ſpecifiſche Schwere des Körpers $= x$ geſetzet wird; ſo iſt $x = \frac{Q}{q}$ (vermöge 36. §.). Es iſt aber

$Q = \frac{P}{V}$ (wegen 34. §.), und $q = \frac{R}{V}$ (wegen 38. §.);

folglich $x = \frac{P}{R}$.

Die zum hydroſtatiſchen Gebrauche beſonders eingerichteten Wagen ſind gewöhnlich mit einem kleinen gläſernen Eimer verſehen, der mit einem durchbrochenen Deckel verſchloſſen wird, um einen hineingelegten Körper von ſpecifiſch leichterer Art zu hindern, daß er im Waſſer nicht empor komme. Mittelſt einer ſolchen Vorrichtung iſt es nun ſehr bequem (nach 41. §.) den Gewichtsverluſt eines feſten Körpers im Waſſer, oder in einer anderen Flüſſigkeit zu beſtimmen, er mag ſpecifiſch ſchwerer oder leichter ſeyn als eine ſolche Flüſſigkeit. Sollte der zu unterſuchende feſte Körper eine ſo geringe ſpecifiſche Schwere haben,

ben, daß er ſammt dem gläſernen Eimer nicht untergehen Fig.
könnte, ſo darf man nur letzteren mit einigen Bleyſchrotten, oder mit etwas Queckſilber beſchweren.

2) Um die ſpecifiſchen Schweren anderer Flüſſigkeiten dur Verſuche zu beſtimmen, wählet man gewöhnlich ein maſſives Stück Glas, weil ſolches auch von den ſchärfeſten Flüſſigkeiten, als Vitriolöhl, Scheidewaſſer, u. d. gl. nicht merklich angegriffen wird. Die zum hydroſtatiſchen Gebrauche eingerichteten Wagen ſind gemeiniglich mit einem dergleichen Stück Glas unter dem Nahmen der Glasperle verſehen. Von einer ſolchen Glasperle beſtimmt man einmahl für alle Mahl den Gewichtsverluſt im Regenwaſſer. Dieſe nähmliche Glasperle wird ſodann mehr in einer ſchwereren, und weniger in einer leichteren Flüſſigkeit verlieren. Die Gewichtsverluſte einer ſolchen Glasperle in verſchiedenen Flüſſigkeiten dividirt durch den Gewichtsverluſt im Regenwaſſer geben nun die geſuchten ſpecifiſchen Schweren dieſer verſchiedenen Flüſſigkeiten. Denn wenn man das eigenthümliche Gewicht des Regenwaſſers $= q$, den Gewichtsverluſt der Glasperle im Regenwaſſer $= R$, und den kubiſchen Inhalt dieſer Glasperle $= V$ ſetzet, die eigenthümlichen Gewichte verſchiedener Flüſſigkeiten aber mit $a, b, c \ldots$ und die beobachteten Gewichtsverluſte der Glasperle in dieſen Flüſſigkeiten mit $A, B, C, \ldots$ bezeichnet; ſo iſt (wegen 32. §.) $R = qV$, $A = aV$, $B = bV$, $C = cV, \ldots$; und $q = \frac{R}{V}$, $a = \frac{A}{V}$, $b = \frac{B}{V}$, $c = \frac{C}{V}$; folglich ſind die geſuchten Quotienten $\frac{a}{q} = \frac{A}{R}$, $\frac{b}{q} = \frac{B}{R}$, $\frac{c}{q} = \frac{C}{R}$ u. ſ. w.

Die ſpecifiſche Schwere des Queckſilbers läßt ſich auf dieſe Art nicht beſtimmen, weil die Glasperle darin nicht ganz einſinken kann. Dafür aber läßt ſich die ſpecifiſche Schwere des Queckſilbers nach n. 1. mittelſt des gläſernen Eimers unterſuchen.

Fig. 3) So wie man nach n. 1. und 2. die ſpecifiſchen Schweren verſchiedener Körper in Abſicht auf das Regenwaſſer finden kann; eben ſo laſſen ſich ſolche auch in Abſicht auf eine andere Flüſſigkeit z. B. Brunnenwaſſer, Weingeiſt, Terpentinöhl, u. d. gl. durch Verſuche beſtimmen. Unterſucht man ferner die ſpecifiſche Schwere einer ſolchen Flüſſigkeit nach n. 2; ſo können ſodann die gefundenen ſpecifiſchen Schweren in Abſicht auf dieſe Flüſſigkeit ſehr leicht auf Regenwaſſer reduciret werden, wenn man ſie mit der ſpecifiſchen Schwere der dabey gebrauchten Flüſſigkeit multipliciret. Denn wenn die ſpecifiſche Schwere eines Körpers in Hinſicht auf eine ſolche Flüſſigkeit $= N$, die ſpecifiſche Schwere eben dieſer Flüſſigkeit in Hinſicht auf das Regenwaſſer $= n$, die geſuchte ſpecifiſche Schwere des unterſuchten Körpers aber $= x$; ferner das eigenthümliche Gewicht des Regenwaſſers $= q$, des unterſuchten Körpers $= Q$, und der dabey gebrauchten Flüſſigkeit $= p$ geſetzet wird; ſo iſt $x = \frac{Q}{q}$; es iſt aber (vermöge 36. §.) $Q = N.p$, und $p = n.q$; folglich $x = N.\,n$.

Man kann auch das eigenthümliche Gewicht einer ſolchen Flüſſigkeit nach 38. §. beſtimmen, darauf aus den gefundenen ſpecifiſchen Schweren verſchiedener Körper in Hinſicht auf dieſe Flüſſigkeit die wirklichen eigenthümlichen Gewichte dieſer nähmlichen Körper eben ſo wie 36. §. berechnen, und darauf ſolche endlich auf Regenwaſſer reduciren.

Auf dieſe Art iſt man im Stande auch die ſpecifiſchen Schweren verſchiedener Salze, und anderer feſter Maſſen, die vom Waſſer aufgelöſet werden, durch Verſuche zu beſtimmen, wenn man deren eigenthümlichen Gewichte mittelſt des Terpentinöhls, des feinſten Weingeiſtes u. d. gl. nach der angeführten Art unterſuchet, und ſodann auf Regenwaſſer reduciret.

§. 44.

§. 44.

Fig.

Man kann die ſpecifiſchen Schweren verſchiedener ſowohl feſter als flüſſiger Körper auch mittelſt eines eigens hierzu eingerichteten ſchwimmenden Körpers beſtimmen; weil es bekannt iſt, daß ein ſchwimmender Körper ſich nur ſo tief in eine flüſſige Maſſe eintauchet, bis das Gewicht des verdrängten Flüſſigen dem abſoluten Gewichte des ſchwimmenden Körpers gleich iſt (25. §.).

Es ſey z. B. ABCD Fig. 17 ein hohler Cylinder von Glas am Boden mit einigen Bleyſchrotten oder mit etwas 17
Queckſilber beſchweret, damit er (wegen 28. §.) in einer flüſſigen Maſſe immer in lothrechter Stellung ſchwimme. Sinkt derſelbe nun in einer Flüſſigkeit bis EF; ſo iſt (wegen 25. §.) das Gewicht der verdrängten flüſſigen Maſſe EBCF dem abſoluten Gewichte dieſes ſo eingerichteten Cylinders gleich. Unterſucht man dieſes Gewicht des gehörig beſchwerten Cylinders mittelſt einer genauen Wage, und berechnet den kubiſchen Inhalt des eingetauchten Theiles; ſo findet man das eigenthümliche Gewicht einer ſolchen Flüſſigkeit, wenn man das Gewicht des Cylinders mit dem kubiſchen Inhalte des eingetauchten Theiles oder des verdrängten Flüſſigen dividiret, ſo wie im 38. §. Wenn man nähmlich das abſolute Gewicht des Cylinders $= P$, und das eigenthümliche Gewicht des Flüſſigen $= Q$ ſetzet; ſo iſt $Q = \frac{P}{\text{EBCF}}$, weil P zugleich das Gewicht der verdrängten flüſſigen Maſſe EBCF iſt. Sinkt nun eben dieſer Cylinder in einer anderen Flüſſigkeit bis ef, und es iſt dieſer Flüſſigkeit eigenthümliches Gewicht $= q$; ſo iſt $q = \frac{P}{\text{eBCf}}$. Daraus folgt $Q : q = \frac{1}{\text{EBCF}} : \frac{1}{\text{eBCf}} = \text{eBCf} : \text{EBCF}$. Nähmlich die eigenthümlichen Gewichte verſchiedener Flüſſigkeiten verhalten ſich umgekehrt, wie die eingetauchten Theile eines und desſelben darin ſchwimmenden Cylinders, oder auch eines anderen ſchwimmenden Körpers von beliebiger Geſtalt; weil die angeführten

Fig. ten Gleichungen immer richtig ſind, wenn die eingetauch-
17 ten Theile EBCF und eBCf, als die kubiſchen Inhalte der zwey verſchiedenen verdrängten flüſſigen Maſſen, auch keine cylindriſche ſondern was immer für eine irreguläre Form haben.

§. 45.

Iſt nun die Differenz der eigenthümlichen Gewichte ſehr klein, ſo iſt bey dem angeführten Gebrauche des ſchwimmenden Cylinders der Punct e deſto näher bey E, je weiter der Cylinder iſt; welches die Ausmeſſung und Berechnung immer etwas ungewiß macht. Man hat daher verſchiedene ſchwimmende Körper anſtatt des Cylinders zur Beſtimmung der ſpecifiſchen Schweren verſchiedener Flüſſigkeiten ausgedacht, und ſolchen die Benennung Senkwagen beygelegt.

Die ſogenannte Fahrenheitiſche Senkwage iſt in einigen Fällen ſehr bequem. Sie beſteht aus einer gläſer-
18 nen Röhre CD Fig. 18 und aus zwey damit verbundenen hohlen Kugeln A, B, wovon die unterſte A einige durch die Röhre hinein gelaſſene Bleyſchrotte aufnimmt, die obere B aber, die auch in jeder Flüſſigkeit untergetauchet ſeyn muß, den Schwerpunct des verdrängten Waſſers über den Schwerpunct der gehörig beſchwerten Senkwage beträchtlich erhebet, wodurch dieſes Inſtrument immer in verticaler Stellung verbleibet.

Solche Senkwagen läßt man 1) entweder bey einerley Gewichte zu verſchiedenen Tiefen, oder 2) bey verſchiedenen Gewichten zu einerley Tiefe in verſchiedenen Flüſſigkeiten einſinken, um dadurch die Verhältniſſe der eigenthümlichen Gewichte, oder die ſpecifiſchen Schweren ſolcher Flüſſigkeiten beſtimmen zu können.

§. 46.

Läßt man nun in zwey verſchiedenen Flüſſigkeiten die Senkwage verſchiedentlich beſchweret bis zu einerley Tiefe einſinken; und ſetzet das ſpecifiſche Gewicht der einen Flüſſigkeit $= q$, und der anderen $= Q$, daß abſolute Gewicht der Senkwage im erſten Falle $= p$, und im zweyten

ten $= P$, den kubiſchen Inhalt des eingetauchten Theils der Senkwage aber, oder des verdrängten Flüſſigen in jedem Falle $= V$; ſo iſt $p = Vq$, und $P = VQ$, weil Vq und VQ die Gewichte der verdrängten Flüſſigkeiten bedeuten, welche jederzeit dem abſoluten Gewichte der Senkwage gleich ſind. Daraus folgt $p : P = q : Q$, nähmlich die verſchiedenen Gewichte der Senkwage, womit ſie in verſchiedenen Flüſſigkeiten bis zu einerley Tiefe einſinket, verhalten ſich, wie die eigenthümlichen Gewichte, oder auch wie die ſpecifiſchen Schweren dieſer Flüſſigkeiten. Wenn man daher die Senkwage zu erſt im Regenwaſſer, und ſodann in verſchiedenen anderen Flüſſigkeiten verſchiedentlich beſchweret bis zu einerley Tiefe einſinken läßt, und in jedem Falle das Gewicht der gehörig beſchwerten Senkwage mittelſt einer genauen Wage richtig beſtimmet; ſo laſſen ſich daraus die ſpecifiſchen Schweren ſolcher Flüſſigkeiten ableiten. Fig. 18

§. 47.

Wenn man die Senkwage immer mit einerley Gewichte beſchweret in verſchiedenen Flüſſigkeiten bis zu verſchiedenen Tiefen einſinken läßt; ſo iſt es nicht ſoleicht aus dieſen verſchiedenen Tiefen die ſpecifiſchen Schweren der Flüſſigkeiten abzuleiten. Solche verhalten ſich zwar umgekehrt wie die Kubikinhalte des verdrängten Flüſſigen. Denn wenn das Gewicht der Senkwage $= p$ ungeändert verbleibt, und ſolche in der erſten Flüſſigkeit bis E einſinket, ſo daß der kubiſche Inhalt des verdrängten Flüſſigen ABE $= v$ ſey, in einer anderen Flüſſigkeit aber dieſelbe bis F einſinket, ſo daß ABF $= V$ ſey; wenn ferner das eigenthümliche Gewicht der erſten Flüſſigkeit $= q$, und der zweyten $= Q$ iſt: ſo iſt $p = qv$, und auch $p = QV$ wie im 44. §. Daher iſt auch $qv = QV$, und $q : Q = V : v$. Allein eben dieſe kubiſchen Inhalte für verſchiedene Einſenkungen ſind wegen der irregulären Geſtalt der Senkwage beſchwerlich zu beſtimmen. Im erforderlichen Falle kann man durch Beyhülfe der Gleichung $p = qv$ dieſe kubiſchen Inhalte auf folgende Art ſuchen.

Man

Fig. 18 Man bemerke die Puncte E und F, bis wohin die Senkwage in der ſchwereſten und leichteſten der verſchiedenen zu unterſuchenden flüſſigen Maſſen einſinket, und theile den Raum EF in eine beliebige Anzahl gleicher Theile. In einer flüſſigen Maſſe, deren eigenthümliches Gewicht $= q$ (nach 38. §.) bereits bekannt iſt, tauche man ſodann dieſe Senkwage mit verſchiedenen Gewichten beſchweret nach und nach bis zu allen Theilungspuncten, und beſtimme für jeden Theilungspunct das abſolute Gewicht der dazu gehörig beſchwerten Senkwage $= p$; ſo iſt vermöge der angeführten Gleichung der mit einem ſolchen Theilungspuncte zuſammen gehörige kubiſche Inhalt des eingetauchten Theiles der Senkwage oder des verdrängten Flüſſigen $v = \frac{p}{q}$. Dieſe ſo beſtimmten kubiſchen Inhalte für verſchiedene Theilungspuncte werden nun in einer Tabelle angemerket, um ſodann mittelſt verſchiedener Einſenkungen bey einerley Gewichte der Senkwage die ſpecifiſchen Schweren verſchiedener Flüſſigkeiten angeben zu können.

§. 48.

Wenn die Senkwage ſo eingerichtet iſt, daß man auf ihr oberes Ende, welches die Geſtalt eines kleinen Tellers oder einer kleinen Schale hat, die Theile eines Gewichtseinſatzes auflegen kann; und man verbindet mit dem unteren Ende einen gläſernen Eimer, oder eine andere ähnliche Vorrichtung (um hiermit kleine Stückchen von feſten Körpern, ſie mögen ſpecifiſch ſchwerer oder leichter ſeyn als die flüſſige Maſſe, eintauchen zu können); ſo läßt ſich ſodann mittelſt einer ſolchen Senkwage ſowohl das abſolute Gewicht, als auch die ſpecifiſche Schwere eines feſten Körpers in Hinſicht auf eine beliebige Flüſſigkeit beſtimmen, und zwar auf folgende Art.

1) Man beſchwere die ſolcher Geſtalt eingerichtete Senkwage mit hineingelaſſenem Bleyſchrotte ſo viel, das ſolche mit dem oberhalb auf den Teller gelegten zu unterſuchenden feſten Körper bis zu einem feſtgeſetzten Puncte E einſinket.

2)

2) Sodann nehme man dieſen feſten Körper von dem Teller weg, und lege anſtatt desſelben ſo viele Theile eines genau zertheilten Gewichtseinſatzes darauf, bis die Senkwage auf den nähmlichen Theilungspunct einſinket; ſo ſind dieſe Theile das abſolute Gewicht $= P$ des ehevor aufgelegten Körpers. Fig. 18

3) Nun nehme man dieſe aufgelegten Gewichtstheile wieder weg, verſenke aber dafür den nähmlichen zu unterſuchenden feſten Körper in den eingetauchten Eimer der Senkwage, und lege wieder auf den Teller ſo viele Gewichtstheile $= p$, daß die Senkwage abermahl bis zum nähmlichen Puncte einſinket; ſo ſind dieſe Gewichtstheile p der Gewichtsverluſt des nun im Eimer befindlichen feſten Körpers, oder das Gewicht der verdrängten flüſſigen Maſſe unter einem mit dem zu unterſuchenden feſten Körper gleich großen Kubikinhalte.

4) Und daraus findet man endlich die ſpecifiſche Schwere des eingetauchten feſten Körpers in Hinſicht auf die dabey gebrauchte Flüſſigkeit $= \frac{P}{p}$, eben ſo wie im 43. §.; wobey $p > P$ gefunden wird, wenn der zu unterſuchende Körper ſpecifiſch leichter als die dabey gebrauchte Flüſſigkeit ſeyn ſollte.

Eine ſolche Senkwage zur Abwägung kleiner Körper ſowohl in freyer Luft, als auch im Waſſer kann von Blech verfertiget werden. Mit dem hohlen Theile B Fig. 18 wird an deſſen unterem Ende mittelſt zweyer oder dreyer Stängelchen ein oberwärts offenes und unten zugeſpitztes Gefäß verbunden, welches mit einem durchbrochenen Deckel verſehen, und mit etwas Bley beſchweret ſeyn muß.

§. 49.

Die Beſtimmungen der eigenthümlichen Gewichte und ſpecifiſchen Schweren ſowohl von feſten als auch von flüſſigen Körpern nach 38. bis 43. §. ſind ſicherer und genauer, als die von 44. bis 48. §. angeführten mittelſt der Senkwage. Die Senkwagen werden meiſtens zu anderen Abſich-

Fig. ten gehörig eingerichtet, z. B., um zu unterſuchen wie viel eine Salzauflöſung oder ein Salzwaſſer, auch Sohle genannt, in jedem Kubikfuß oder auch in jedem Eimer zu 40 Maß an Salz enthalte. Eine dazu eingerichtete Senkwage erhält den Nahmen Salzwage, Aräometer oder auch Sohlwage. Man findet nähmlich durch einen leicht anzuſtellenden Verſuch, daß eine Salzauflöſung eine deſto größere Dichtigkeit, und folglich auch ein deſto größeres eigenthümliches Gewicht hat, und daß daher auch eine und dieſelbe darein getauchte Senkwage um ſo mehr hervorraget, jemehr an Salz darin enthalten iſt.

Um eine Sohlwage einzurichten, damit ſie mit einer erträglichen Zuverläſſigkeit den Salzgehalt einer Sohle anzeige, nimmt man eine oben zugeſchmolzene Senkwage von ſolcher Beſchaffenheit, daß ſie in reinem Waſſer beynahe ganz einſinket, und ſchreibt zu dieſem Puncte eine 0. So dann nimmt man 1 oder 2 Pfunde Salz, gießet ſo viel reines Waſſer darauf, daß die Salzauflöſung einen beſtimmten kubiſchen Inhalt z. B. genau Einen Eimer betrage (dieſes kann im verjüngten Maße und Gewichte geſchehen) und unterſucht nun, wie tief jetzt die nähmliche Senkwage einſinket. Den Punct dieſer Einſenkung bezeichnet man mit 1 oder mit 2, nachdem man 1 oder 2 Pfunde Salz zu einem Eimer der Salzauflöſung genommen hat. Eben ſo werden die Puncte der Sohlwage geſucht, welche anzeigen ſollen, daß in Einem Eimer einer Sohle 3, 4, 5, oder mehr Pfunde an Salz enthalten ſind.

Man hat auch Senkwagen um die Beſchaffenheit des Biers und des Weins zu prüfen, die ſodann Bier- oder Weinwagen, auch Bier- oder Weinproben heißen. Auch kann man den Senkwagen eine Einrichtung geben, daß ſie anzeigen, ob eine Salpeterlauge hinlänglich Gehalt habe, um mittelſt des Einſiedens den Salpeter zu gewinnen.

§. 50.

Der ſchon ſo oft gebrauchte Satz, daß jeder feſte Körper im Waſſer ganz eingetaucht am Gewichte ſo viel verliert,

liert, als das verdrängte Waſſer wiegt; und daß daher Fig.
auch die Gewichtsverluſte von verſchiedenen Theilen eines und desſelben gleichförmig dichten Körpers ſich verhalten, wie die abſoluten Gewichte dieſer Theile, ſetzet uns in den Stand folgende Aufgabe aufzulöſen.

Aufgabe.

Ein feſter Körper iſt aus zwey verſchiedenen mit einander vermiſchten Maſſen dergeſtalt zuſammen geſetzt, daß der Raum oder Kubikinhalt dieſer gemiſchten Maſſe der Summe der Räume gleich iſt, welche die zwey verſchiedenen Maſſen oder Ingredienzen vor der Vermiſchung einnahmen; man ſoll hydroſtatiſch unterſuchen, wie viel von jeder Maſſe in der Miſchung enthalten ſey.

Auflöſung.

Man unterſuche das ganze Gewicht der gegebenen Miſchung, und zugleich auch (nach 41. §.) den Gewichtsverluſt im Regenwaſſer, oder in einer anderen Flüſſigkeit. Ferner nehme man von jeder Gattung der zwey bekannten Ingredienzen, woraus die Miſchung beſteht, ein beliebiges Stück, und beſtimme von jedem ſolchen Stücke ſowohl das abſolute Gewicht, als auch den Gewichtsverluſt in eben derſelben Flüſſigkeit. Daraus läßt ſich ſodann die geſuchte Menge jeder Ingredienz am Gewichte auf folgende Art berechnen.

Die Miſchung *M* wiege *m* verliere im Waſſer μ

ein Stück	von	*A* . . . . *a* . . . . α
der Ingred.		*B* . . . . *b* . . . . β

 Iſt

Fig. Iſt nun in M von A am Gewichte x, ſo iſt darin von B am Gewichte $m - x$;

folglich $a : \alpha = x : \frac{\alpha x}{a}$;

und $b : \beta = m - x : \frac{m\beta - \beta x}{b}$;

hiermit ſind die Gewichtsverluſte der zwey in der Miſchung enthaltenen Ingredienzen einzeln ausgedruckt, deren Summe μ bekannt iſt.

Daher iſt $\mu = \frac{\alpha x}{a} + \frac{m\beta - \beta x}{b}$;

und daraus folgt endlich

$$x = \frac{(\mu b - m\beta)\, a}{\alpha b - a\beta} \text{ die Menge von } A$$

$$m - x = \frac{(m\alpha - \mu a)\, b}{\alpha b - a\beta} \ldots B.$$

Es ſey z. B. M eine Miſchung von Zinn (A) und von Bley (B) zuſammen geſchmolzen; es ſey das Gewicht dieſer Miſchung $m = 120$ Pfund, und $\mu = 14$ Pfund. Ferner ſey bey einem Stücke von reinem Zinne $a = 37$ Loth, $\alpha = 5$ Loth; und bey einem Stücke von reinem Bley $b = 23$ Loth, $\beta = 2$ Loth: ſo ſind in der Miſchung an Zinn 74 Pfund, und an Bley 46 Pfund enthalten.

Auf dieſelbe Art und bey derſelben Vorausſetzung findet man die Menge des Zinnes und Kupfers bey einem vorgelegten Stuckmetall, auch Kanonengut und Bruchmetall genannt, wenn ſich dabey keine anderen Ingredienzen befinden.

Die letzten zwey Gleichungen können auch auf folgende Art geſchrieben werden:

die

die aus *A* und *B* beſtehende Miſchung Fig.

enthält von $A = \dfrac{\dfrac{a}{\alpha}\left(m - \dfrac{b}{\beta}\mu\right)}{\dfrac{a}{\alpha} - \dfrac{b}{\beta}}$,

und von $B = \dfrac{\dfrac{b}{\beta}\left(m - \dfrac{a}{\alpha}\mu\right)}{\dfrac{b}{\beta} - \dfrac{a}{\alpha}}$,

wo $\dfrac{a}{\alpha}$ und $\dfrac{b}{\beta}$ die für bekannt angenommenen ſpecifiſchen Schweren der zwey Ingredienzen ſind, $\dfrac{b}{\beta}\mu$ und $\dfrac{a}{\alpha}\mu$ aber die Gewichte der Ingredienzen unter einem mit der Miſchung *m* gleich großen kubiſchen Inhalte vorſtellen. Unter dieſer Geſtalt ſind nun die Formeln etwas leichter zu merken, als unter der vorigen.

Anmerkung. Dieſe Aufgabe rühret urſprünglich von Hiero, Könige zu Syrakuſa in Sicilien her. Dieſer König hatte ſich von einem Künſtler eine goldene Krone verfertigen laſſen. Als die Krone bereits fertig war, gefiel zwar ſolche dem Könige wegen der zierlichen und künſtlichen Arbeit ganz gut; jedoch hatte er Urſache zu vermuthen, daß der Künſtler aus Betrug mehr Silber unter das Gold gemiſcht habe, als es ausbedungen war. Er fragte den berühmten Mathematiker Archimedes, ob es nicht möglich ſey die Menge des Goldes und Silbers in der bereits fertigen Krone anzugeben, ohne ſolche im geringſten zu verletzen. Archimedes ſuchte lange vergebens eine Auflöſung dieſer Aufgabe. Endlich bey einer Gelegen-

heit

Fig. heit, da er ſich eben im Bade befand, und vermuthlich über das Eintauchen der feſten Körper in flüſſigen Maſſen nachdachte, verfiel er auf die geſuchte Auflöſung dieſer Aufgabe. Er war darüber ſo ſehr erfreuet, und von einem ſolchen Eifer zur baldigen Ausführung der gefundenen Auflöſung ergriffen, daß er alſogleich aus dem Bade aufſprang, ohne ſich zu bekleiden nach Hauſe lief, und unterweges mehrmahl laut ausrief: ευρηκα! ευρηκα! gefunden! gefunden!

Zwey=

Zweytes Hauptſtück.

Grundlehre der Aeroſtatik.

I. Abſchnitt.

Grundlehre des Gleichgewichtes der Kräfte bey elaſtiſchen flüſſigen Maſſen.

§. 51.

Es iſt bereits im 2. und 3. §. geſagt worden, daß man diejenigen flüſſigen Maſſen, welche durch einen vermehrten Druck in einen kleineren Raum zuſammen gepreſſet werden, bey vermindertem Drucke aber ſich in einen größeren Raum ausbreiten, elaſtiſche flüſſige Maſſen, oder luftförmige Flüſſigkeiten nennet. Eine flüſſige Maſſe wäre vollkommen elaſtiſch, wenn ſich ſolche durch einen ohne Ende vermehrten Druck in einen ohne Ende verminderten Raum zuſammen preſſen ließe; und umgekehrt, wenn ſie ſich bey gänzlich aufgehobener äußerer Zuſammenhaltung in einen Raum ohne alle Gränzen ausbreiten würde. Vollkommen elaſtiſche Flüſſigkeiten können daher nicht anders, als in Gefäßen von hinlänglich feſtem Umfange eingeſchloſſen, in Erwägung gezogen werden. Die in der Natur wirklich vorhandenen elaſtiſchen Flüſſigkeiten dürften nicht vollkommen elaſtiſch ſeyn. Wenn ſolche allzu ſtark zuſammen gepreſſet, Fig.

oder

Fig. 1 oder allzu ſehr ausgedehnet werden; ſo verlieren ſolche vielleicht ihre Elaſticität, ſo wie bey einer elaſtiſchen Stahlfeder durch Ueberſpannung die Federkraft zerſtöret wird.

§. 52.

Die Eigenſchaften, welche elaſtiſche flüſſige Maſſen bloß wegen der Flüſſigkeit beſitzen, als z. B. die leichte Beweglichkeit der Elementar-Theilchen an und neben einander, die Fortpflanzung eines dagegen angebrachten Druckes nach allen Richtungen, u. ſ. w. ſind eben dieſelben wie bey unelaſtiſchen Flüſſigkeiten. Doch haben letztere wegen der Elaſticität noch einige beſondere Eigenſchaften, welche nun zu beſtimmen ſind.

Eine weſentliche Eigenſchaft der elaſtiſchen Flüſſigkeiten, welche den unelaſtiſchen mangelt, beſteht darin: Wenn von einer elaſtiſchen Flüſſigkeit, ohne auf die Schwerkraft Rückſicht zu nehmen, was immer für eine Menge in irgend einem Gefäße gänzlich eingeſchloſſen gehalten wird, ſo drückt ſolche vermöge ihrer Elaſticität gegen jeden Theil des feſten Umfanges des Gefäßes, wo eine unelaſtiſche Flüſſigkeit in einem ſolchen Zuſtande gegen die Theile des Umfanges des Gefäßes gar keinen Druck äußert. Die Preſſungen der elaſtiſchen Flüſſigkeit in dem angenommenen Zuſtande gegen gleich große ebene Flächen des Umfanges des Gefäßes nach darauf ſenkrechten Richtungen von innen nach außen ſind gleich groß; gegen ungleich große Flächen aber ſind ſie dieſen proportional wie im 7. §. Wenn nähmlich in irgend einem Gefäße des Durchſchnittes HE Fig. 1 eine elaſtiſche Flüſſigkeit ohne Schwere ſich eingeſchloſſen befindet; ſo ſind die Preſſungen gegen die ebenen Flächen AB und HG nach darauf ſenkrechten Richtungen gleich groß, wenn dieſe Flächen am Flächeninhalte gleich groß ſind. Iſt aber die Fläche HG $n$mahl größer als AB; ſo iſt auch die Preſſung gegen HG $n$mahl größer als gegen AB, oder die erſte Preſſung verhält ſich zur zweyten wie HG zu AB.

§. 53.

§ 53. Fig. 1

Wenn man die Preſſungen der in irgend einem Gefäße eingeſchloſſenen elaſtiſchen Flüſſigkeit ohne Schwere gegen wie immer ungleich große ebene Flächen durch Gewichte von ſchweren lothrecht ſtehenden Waſſerſäulen auf eben dieſen ebenen Flächen als Grundflächen ausdrucket; ſo haben ſolche Waſſerſäulen einerley Höhe, oder die Druckhöhe der Elaſticität iſt in allen Stellen einerley.

Denn es ſey im Gefäße Fig. 1 die Preſſung der elaſtiſchen Flüſſigkeit ohne Schwere von innen nach außen gegen AB $= P$, und gegen HG $= Q$; die Höhe einer ſchweren Waſſerſäule auf der Grundfläche AB, die in verticaler Stellung gegen AB die Preſſung $= P$ auszuüben vermag, $= a$, und die Höhe einer ſchweren Waſſerſäule auf HG, die ebenfalls in verticaler Stellung gegen HG eine Preſſung $= Q$ ausübet, $= b$: ſo iſt $P = AB.a.q$, und $Q = HG.b.q$ für das ſpecifiſche Gewicht des Waſſers q. Nun iſt $P : Q = AB : HG$ (52. §.), oder $AB.a.q : HG.b.q = AB : HG$; folglich $a : b = 1 : 1$, nähmlich $a = b$.

§. 54.

Wenn das Gefäß Fig. 1, worin eine elaſtiſche Flüſſigkeit ohne Schwere eingeſchloſſen iſt, bey AB geöffnet, und dafür ein frey beweglicher Stämpel in einer dazu paſſenden Röhre angebracht wird; ſo muß im Zuſtande des Gleichgewichtes ein ſolcher Stämpel mit einer Kraft P hineinwärts gedrücket werden, die eben ſo groß iſt, als die Preſſung der elaſtiſchen Flüſſigkeit gegen die Stämpelfläche AB.

Denn wäre die Kraft P, womit der Stämpel AB die elaſtiſche Flüſſigkeit hineinwärts preſſet, größer als der Elaſticitätsdruck der letzteren gegen die Stämpelfläche; ſo würde die elaſtiſche Flüſſigkeit ſich in einen kleineren Raum zuſammenziehen, und der Stämpel ſich in ſeiner Röhre ſo weit hineinwärts bewegen, bis der Elaſticitätsdruck eben ſo groß würde, als die auf den Stämpel wirkende Kraft.

Wäre

Fig. Wäre im Gegentheile der auf den Stämpel von außen wirkende Druck kleiner als der Elaſticitätsdruck von innen gegen die nähmliche Stämpelfläche; ſo würde der Stämpel ſich herauswärts ſo weit bewegen, und die elaſtiſche Flüſſigkeit ſich in einen größeren Raum ſo weit ausbreiten, bis der dadurch verminderte Elaſticitätsdruck eben ſo groß würde, als die auf die Stämpelfläche von außen wirkende Kraft. Das Gleichgewicht kann daher nur dann beſtehen wenn die zwey erwähnten von innen und von außen gegen einander wirkenden Kräfte gleich ſind.

§. 55.

Wenn man die Kraft, womit eine Stämpelfläche gegen eine eingeſchloſſene elaſtiſche Flüſſigkeit im Stande des Gleichgewichtes einwärts gedrückt werden muß, durch eine ſchwere Waſſerſäule auf der Stämpelfläche als Grundfläche vorſtellet, ſo muß nun (wegen 54. §.) die Höhe einer ſolchen Waſſerſäule eben ſo groß ſeyn, als die (im 53. §.) erwähnte Druckhöhe der Elaſticität. Man hat daher von der Größe der Elaſticität einer eingeſchloſſenen elaſtiſchen Flüſſigkeit einen ganz beſtimmten Begriff, wenn man die Höhe einer ſchweren Waſſerſäule weiß, welche durch ihren Druck gegen irgend einen Theil des Umfanges der elaſtiſchen Flüſſigkeit dieſe im Gleichgewichte erhält. Zur Ausmeſſung der Elaſticität einer elaſtiſchen Flüſſigkeit iſt nicht unumgänglich nöthig, ſondern nur gewöhnlich, bekanntes Waſſer zu gebrauchen. Man kann hierzu öfter mit größerem Vortheile eine andere unelaſtiſche Flüſſigkeit z. B. Queckſilber anwenden.

§. 56.

Wenn eine elaſtiſche Flüſſigkeit in einem cylindriſchen
3 oder prismatiſchen Gefäße Fig. 3 von einem auf die Stämpelfläche AB wirkenden Drucke in dem Raume ABCD im Gleichgewichte gehalten wird; und man macht ſodann dieſen Druck *n*mahl ſo groß, als er anfänglich war: ſo iſt es zwar aus dem Begriffe der Elaſticität erſichtlich, daß der Raum EFCD, in welchen die elaſtiſche Flüſſigkeit dadurch gebracht und im Gleichgewichte erhalten wird, kleiner werden

den müſſe, und daß alſo die Dichtigkeit der elaſtiſchen Flüſ- Fig.
ſigkeit dadurch vermehret werde; jedoch läßt ſich das Geſetz, nach welchem die Dichtigkeiten einer elaſtiſchen Flüſſigkeit bey verſchiedenen zuſammendrückenden Kräften ſich ändern, aus dem bloßen Begriffe der Elaſticität nicht ableiten. Es kann eine elaſtiſche Flüſſigkeit gedacht werden, die durch eine *n*fache Druckhöhe in einen *n*fach kleineren Raum zuſammen gepreſſet wird, wo ſodann die Dichtigkeiten bey verſchiedenen zuſammendrückenden Kräften ſich eben ſo gegen einander verhalten, wie dieſe zuſammendrückenden Kräfte. Allein wenn die Dichtigkeiten einer verſchiedentlich gepreßten elaſtiſchen Flüſſigkeit ſich auch anders verhielten, z. B. wie die Quadratwurzeln der zuſammendrückenden Kräfte; ſo könnte deſſen ungeachtet eine ſolche Flüſſigkeit vollkommen elaſtiſch ſeyn. Bey den in der Natur wirklich vorhandenen elaſtiſchen Flüſſigkeiten wird man daher durch Verſuche beſtimmen müſſen, in welchem Verhältniſſe die Dichtigkeiten einer elaſtiſchen Flüſſigkeit bey verſchiedenen zuſammendrückenden Kräften ſtehen.

§. 57.

Der Druck einer elaſtiſchen der Schwerkraft überlaſſenen Flüſſigkeit gegen den Boden eines lothrecht ſtehenden prismatiſchen Gefäßes, worin ſolche eingeſchloſſen gehalten wird, iſt dem ganzen Gewichte einer ſolchen Maſſe und dem Elaſticitätsdrucke der oberſten Schichte gleich, den dieſe durch die Fortpflanzung gegen die Bodenfläche ausübet.

Das prismatiſche Gefäß ABCD Fig. 19, worin eine 19
elaſtiſche ſchwere Flüſſigkeit ganz eingeſchloſſen iſt, ſey in unzählige Schichten von einer ſo kleinen Dicke getheilet, daß man ohne Fehler die Maſſe in jeder Schichte für gleichförmig dicht halten könne. Nun ſeyen die eigenthümlichen Gewichte dieſer Schichten, wie ſie von unten nach oben auf einander folgen, p, q, r, . . . z; ſo iſt das ganze Gewicht aller Schichten, womit der Boden BC gedrückt wird, $= p$. BCaaB $+ q$. aabba $+ r$. bbccb . . . $+ z$. nnDAn. Iſt nun die oberſte Schichte nnDAn noch ela-

Fig. 19 elaſtiſch; ſo ſucht ſie ſich auszudehnen, und drückt dadurch ſowohl gegen den Deckel AD, als auch gegen die zunächſt unten befindliche Schichte. Dieſer Druck pflanzet ſich auch gegen die Bodenfläche BC fort, und muß daher zu dem Gewichte aller Schichten noch hinzugeſetzet werden, um den ſämmtlichen Druck gegen BC zu erhalten. Wäre aber das Gefäß ſo hoch, daß ſich die elaſtiſche Flüſſigkeit darin ſoweit ausgebreitet hätte, bis die oberſte Schichte keine ausdehnende Kraft mehr beſäße, oder bis ihr Ausdehnungsbeſtreben nur noch ſo groß wäre als ihr Gewicht; ſo wäre zu obiger Summe der Gewichte aller Schichten nichts mehr hinzuzuſetzen. Der Druck gegen die Bodenfläche wäre ſodann eben ſo beſchaffen, als wenn das Gefäß ABCD mit verſchiedenen ſchweren Schichten unelaſtiſcher Flüſſigkeiten von den Dichtigkeiten p, q, r,... z angefüllet wäre.

§. 58.

Die niedriger liegenden Schichten im vorigen 57. §. leiden einen größeren Druck, als die höheren, da jene durch ein größeres darauf drückendes Gewicht gepreſſet werden als dieſe. Die niedrigeren Schichten ſind daher dichter und elaſtiſcher als die oberen. Auch pflanzet ſich wegen der Flüſſigkeit der Maſſe der Druck, den jede Schichte leidet, nach jeder Richtung, und folglich auch gegen jeden Theil des Umfanges des Gefäßes fort.

§. 59.

Wenn man im §. 57. die Dicken der Schichten gleich groß annimmt, und jede ſolche Dicke $= e$ ſetzet; ſo ſind die Gewichte der von unten auf einander folgenden Schichten, deren jede durch die Fortpflanzung des Druckes eine ihrem Gewichte gleiche Preſſung gegen die Bodenfläche ausübet, $= BC.e.p + BC.e.q + BC.e.r\ldots + BC.e.z = BC.e.(p + q + r\ldots + z)$, weil die Durchſchnittsflächen BC, aa, bb, &c. alle einander gleich ſind.

Wären die horizontalen Durchſchnittsflächen BC, aa, bb, cc... verſchieden; wäre alſo das Gefäß nicht priſmatiſch, ſondern wie immer irregulär geſtaltet: ſo wären die

die Gewichte der von unten auf einander folgenden Schich- Fig.
ten, deren jede die unendlich kleine Höhe e hätte, $= BC.e.p + aa.e.q + bb.e.r \ldots$ 19
Daraus folgt der von den Schichten aabb, bbcc, &c. auf BC wirkende fortgepflanzte Druck (wegen 7. §.) $= BC.e.q + BC.e.r +$ &c. (Es verhält ſich nähmlich der von dem Gewichte der Schichte aabba gegen BC fortgepflanzte Druck zu dem Gewichte $aa.e.q$ dieſer Schichte, womit die Durchſchnitts-Ebene aa unmittelbar gedrückt wird, wie die Fläche BC zur Fläche aa). Folglich iſt auch in dieſem Falle wie ehevor der Druck gegen die Bodenfläche BC wegen der Schwere der elaſtiſchen Schichten $= BC.e.(p + q + r \ldots + z)$, wozu man noch den Elaſticitätsdruck, welchen die oberſte Schichte durch die Fortpflanzung gegen die Bodenfläche ausübet, hinzuſetzen muß, um den ſämmtlichen Druck gegen die Bodenfläche zu erhalten.

Wenn daher ein Gefäß, welches eine ſchwere elaſtiſche Flüſſigkeit eingeſchloſſen enthält, auch nicht prismatiſch, ſondern wie immer geſtaltet iſt; ſo iſt doch der Druck gegen die Bodenfläche eben ſo beſchaffen als in einem prismatiſchen Gefäße von eben derſelben Bodenfläche und lothrechter Höhe.

Und nun iſt es auch leicht den fortgepflanzten Druck einer eingeſchloſſenen ſchweren elaſtiſchen Flüſſigkeit gegen jedes gegebene Stück des feſten Umfanges des Gefäßes zu beurtheilen. Zu dieſer Abſicht darf man die eingeſchloſſene ſchwere elaſtiſche Flüſſigkeit im Zuſtande des Gleichgewichtes ſo betrachten, wie eine andere in einem ſolchen Gefäße eingeſchloſſene unelaſtiſche Flüſſigkeit, die aus einer unzähligen Menge über einander liegender Schichten von unendlich kleinen Höhen beſtünde, wovon jede Schichte ihre eigene Dichtigkeit hätte. Durch dieſe Erwägung beſtimmet man den Druck gegen das gegebene Stück des Umfanges wegen der Schwere einer jeden Schichte nach 15. §. und vermehret ſolchen um den fortgepflanzten Elaſticitätsdruck der oberſten Schichte gegen das gegebene Stück des feſten Umfanges des Gefäßes. Durch dieſe Betrachtung kann man

auch

Fig. auch ferners ſo wie im 20. §. darthun, daß aus allen ſenkrechten Preſſungen der eingeſchloſſenen ſchweren elaſtiſchen Flüſſigkeit gegen den feſten Umfang des Gefäßes ein verticaler Druck nach unten entſtehe, der dem ganzen Gewichte der eingeſchloſſenen Flüſſigkeit gleich iſt.

§. 60.

Erfahrunsſätze.

Es gibt wirklich in der Natur eine elaſtiſche Flüſſigkeit, die wir Luft nennen. Die uns allenthalben umgebende, und alle ſonſt leere Räume erfüllende Luft iſt wirklich eine flüſſige, elaſtiſche, ſchwere Maſſe, welche durch einen dagegen angebrachten Druck eine größere Dichtigkeit und Elaſticität, durch Wärme hingegen eine kleinere Dichtigkeit aber eine vermehrte Elaſticität erhält. Die ganze, unſere Erde in Geſtalt einer mit der Erde concentriſchen Kugel umgebende, Luftmaſſe heißt die Atmosphäre oder der Dunſtkreis, weil in ihr die Dünſte von der Erde aufſteigen, und aus ihr in Geſtalt des Thaues, Nebels, Regens, Schnees und Hagels auf die Erde wieder herabfallen; daher auch die Luft nach der größeren oder geringeren Menge ſolcher Dünſte entweder feucht oder trocken genannt wird.

1) Das Daſeyn einer ſolchen elaſtiſchen Flüſſigkeit, obſchon ſie gewiſſer Maſſen unſichtbar, eigentlich durchſichtbar iſt, kann zwar nicht unmittelbar mittelſt des Geſichtes, wohl aber mittelſt des Gefühles wahrgenommen werden. Z. B. eine ſchnelle Bewegung mit der flachen Hand gegen das Geſicht macht uns die Luft fühlbar. Mit jedem Athemzuge ziehen wir die Luft in die Bruſt, und ſtoßen ſie wieder heraus. Durch das Blaſen mit dem Munde, noch mehr aber durch Winde und Stürme offenbaret ſich die Luft dem Gefühle und Gehöre. Ohne zu athmen kann kein Thier leben; daher überall, wo Thiere ſich aufhalten, auf

den

den höchſten Bergen, und in den tiefſten Gründen, Luft befindlich ſeyn muß. Auch iſt die Luft die flüſſige Maſſe, worin die Wolken ſchwimmen, und worin ein Luftballen wegen ſeines geringeren Gewichtes in Vergleichung mit dem Gewichte der verdrängten Luft, ſo wie ein ſpecifiſch leichterer Körper im Waſſer, in die Höhe ſteigt. Fig.

2) Die Elaſticität der Luft zeigt eine Lammsblaſe, die man durch Hineinblaſen mit Luft füllet, und hierauf feſt zubindet. Dieſelbe erhält durch einen gegen den Umfang angebrachten Druck ſehr merkliche Gruben, nach aufgehobenem Drucke aber ihre vorige Geſtalt wieder. Auch wirkt die elaſtiſche Kraft der Luft bey einem Glaſe, das man umgekehrt, damit die Luft nicht zur Seite entwiſche, in lothrechter Richtung ins Waſſer hineindrücket. Die eingeſchloſſene Luft wird durch das eintretende Waſſer und durch den fortgepflanzten Druck desſelben zuſammen gedrückt; aber nach aufgehobenem Drucke dehnet ſie ſich ſogleich wieder aus, und treibt das Waſſer zurück. Eben dieſes zeigen auch die bekannten Carteſiſchen Teufelchen. Bey dieſen preſſet der auf die Oberfläche des eingeſchloſſenen Waſſers angebrachte Druck durch die Fortpflanzung die in der Höhlung des gläſernen Teufelchens befindliche Luft etwas zuſammen, und dadurch dringet in dieſe Höhlung ſo viel Waſſer hinein, daß ſodann das Teufelchen ſpecifiſch ſchwerer als Waſſer wird, und in dieſem zu Boden ſinket. Nach aufgehobenem Drucke gegen die Oberfläche dehnet ſich die in der Höhlung des Teufelchens befindliche Luft aus, und treibt von dem durch die kleine Oeffnung eingedrungenen Waſſer wieder ſoviel heraus, daß das Teufelchen ſpecifiſch leichter wird als Waſſer, und daher in dieſem wieder in die Höhe ſteiget. Eben dieſe Carteſiſchen Teufelchen zeigen zugleich die Fortpflanzung des Druckes in einer flüſſigen Maſſe nach allen Richtungen auf eine ſehr deutliche Art. Denn der mit dem Finger angebrachte Druck gegen die Oberfläche des in einer engen Flaſche eingeſchloſſenen Waſſers pflanzet ſich durch die Oeffnung des wie immer gekrümmten Schwänzchens indeſſen innere Höh-

lung

Fig. lung bis zu der allda im oberen Theile befindlichen Luft fort, und drücket dieſe etwas zuſammen.

3) Die Schwere iſt der Luft mit allen übrigen Körpern gemein, und erhält ſie bey der Erde, ſo daß ſie mit Beſeitigung der Schwere, wodurch ſie gegen die Erde gedrückt wird, vermöge ihrer Elaſticität ſich gänzlich zerſtreuen würde. Im folgenden wird auch gezeigt werden, wie man ihr eigenthümliches Gewicht beſtimmen könne.

4) Der Druck treibt die Lufttheilchen näher zuſammen, und bringt eine beſtimmte Menge derſelben in einen kleineren Raum, oder in einen beſtimmten Raum eine größere Menge derſelben. Der Druck comprimirt die Luft, wodurch die Dichtigkeit und Elaſticität derſelben vergrößert wird. Die comprimirte Luft dehnt ſich bey aufgehobenem Drucke wieder in ihren vorigen Raum aus, oder dilatirt ſich, wodurch ihre vorhergehende vermehrte Dichtigkeit und Elaſticität wieder abnimmt. Dieſes zeigte ſchon in 2) das in verkehrter Lage ins Waſſer eingetauchte Glas. Auch läßt ſich in ein feſtes mit Luft erfülltes cylindriſches Gefäß ein genau paſſender Stämpel oder Kolben hineinſtoßen, der, ſobald der Druck nachläßt, von der ſich ausdehnenden Luft zurückgetrieben wird.

5) Die Wärme dehnt die Luft in einen größeren Raum aus, und vermehrt ihre Elaſticität, ſo daß ſie einer dichteren kalten Luft das Gleichgewicht hält. Dieſes zeiget folgender Verſuch. Man binde eine ſchlaffe Lammsblaſe feſt zu, und erwärme ſie allmählich auf allen Seiten; ſo wird die wenige noch darin enthaltene Luft ſich ſichtbahrlich ausdehnen, und der dichteren aber kälteren äußeren Luft das Gleichgewicht halten. Wäre daher eine Luftmaſſe in einem Gefäße eingeſchloſſen, ſo daß ſie ſich in keinen größeren Raum ausdehnen könnte; ſo bliebe bey der Erwärmung ihre Dichtigkeit zwar ungeändert, aber ihr Beſtreben ſich auszudehnen, das iſt, ihr Elaſticität würde immer größer, je mehr man ſie erwärmete. Ein Grad der Wärme, der die Luft in einen *n*mahl größeren Raum ausdehnen würde, machete ihre Elaſticität *n*mahl größer. Der

Druck

Druck vergrößert die Elaſticität der Luft, weil er mehre- Fig.
re Lufttheilchen in einen engeren Raum zuſammenbringt; die Wärme aber verſtärkt ſie, weil ſie jedem Lufttheilchen ein größeres Ausdehnungsbeſtreben ertheilet.

6) Die Atmoſphäre hat die Geſtalt einer mit der Erde concentriſchen Kugel, und eine von der Erdoberfläche hinaufwärts abnehmende Dichtigkeit und Elaſticität.

Denn da die Luft flüſſig und gegen den Mittelpunct der Erde ſchwer iſt; ſo muß ſie im Stande des Gleichgewichtes die Erdkugel allenthalben in gleicher Höhe umgeben. Denkt man ſich nun die ganze Maſſe durch lauter concentriſche Kugelflächen in Schichten von ſehr kleinen Höhen getheilet; ſo iſt die Dichtigkeit und Elaſticität in jeder ſolchen Schichte bey einerley Grad der Wärme deſto kleiner, je kleineres Gewicht darauf drücket, das iſt je höher eine ſolche Schichte über der Erde iſt. An der äußerſten Gränze der Atmoſphäre haben die Lufttheilchen von außen keinen Druck mehr zu leiden, und hören auf elaſtiſch zu ſeyn; oder das Ausdehnungsbeſtreben der äußerſten Schichte der Atmoſphäre iſt ihrem Beſtreben gegen die Erde zu fallen gleich.

7) Die Luft in unſerer Atmoſphäre iſt wohl ſelten oder vielmehr nie vollkommen rein, ſondern in ihren Zwiſchenräumen mit verſchiedenen fremdartigen Theilen, beſonders mit wäſſerigen Dünſten erfüllet, welche ſchwerlich nach eben dem Verhältniſſe ausgebreitet ſind, in welchem die Dichtigkeit der reinen Luft von der Erde hinaufwärts abnimmt. Nach der verſchiedenen Menge ſolcher Dünſte iſt die Luft bald feuchter bald trockener, wodurch auch ihre Dichtigkeit und ihr Gewicht bald größer bald kleiner werden. Die untere Luft wird beſonders durch mehrere Dünſte dichter, aber dagegen auch durch mehrere Wärme ausgedehnter, ſo daß eines durch das andere zum Theil aufgehoben wird.

Fig.

§. 61.

Die dem Drucke der Atmoſphäre auf die Oberfläche des Weltmeeres zugehörige Höhe beträgt ungefähr 32 Pariſ. Fuß: das iſt jede dem Drucke der Atmoſphäre ausgeſetzte ebene Fläche im Horizonte des Weltmeeres wird von der ſchweren und elaſtiſchen Flüſſigkeit der Atmoſphäre nach einer darauf ſenkrechten Richtung ſo ſtark gepreſſet, als wenn ſchweres Waſſer mit einer lothrechten Höhe von beyläufig 32 Par. Fuß darauf drückete.

Dieſer Satz wird durch folgenden Verſuch erwieſen.
20 Man nehme Fig. 20 eine gläſerne Röhre AB über 28 Pariſ. Zolle lang, im Durchmeſſer 2 bis 3 Linien, die oben bey B luftdicht verſchloſſen, das iſt, ſo zugeſchmolzen iſt, daß keine Luft eindringen kann, fülle ſie mit gereinigtem Queckſilber an, und treibe die zwiſchen dem Queckſilber ſich etwa noch aufhaltenden Luftbläschen mit einem feinen Eiſendrathe bey der in die Höhe gerichteten Mündung A gänzlich heraus. Sodann ſtecke man dieſe Röhre mit der feſt zugehaltenen Mündung A in ein mit Queckſilber angefülltes Gefäß, und öffne darauf die Mündung A; ſo wird das Queckſilber in der Röhre von B bis D herabſinken, ſo daß es in einer Höhe CD von etwa 28 Pariſ Zoll über der Oberfläche MN des Queckſilbers im Gefäße ſtehen bleibt. Dieſe Höhe CD des Queckſilbers von beyläufig 28 Pariſ. Zollen findet ſtatt, wenn der Verſuch ſehr nahe am Horizonte des Weltmeeres gemacht wird. In Gegenden, welche über den Horizont des Weltmeeres ſehr beträchtlich erhöhet ſind, iſt die erwähnte Höhe CD des ſtehengebliebenen Queckſilbers um vieles geringer. Auf dem Gotthardsberge in der Erhöhung von beyläufig 1000 Pariſ. Toiſ. iſt die Queckſilberhöhe CD nur noch ungefähr 21 Pariſ. Zoll.

Die Urſache, daß das Queckſilber bey dem erwähnten Verſuche nahe am Meerhorizonte in einer Höhe von beyläufig 28 Zollen ſtehen bleibt, iſt keine andere, als der von der Atmoſphäre auf die Oberfläche des Queckſilbers MN

wir=

wirkende, und mittelſt der Fortpflanzung durch die Mün- dung A der Röhre AB aufwärts gerichtete Druck. Zu meh- rerer Deutlichkeit denke man in dem Queckſilber die Fort- ſetzung einer umgebogenen Röhre von A nach R; ſo ſteht über R eine ſchwere Luftſäule bis an die oberſte Gränze der Atmoſphäre, drückt mittelſt ihres Gewichtes auf das Queckſilber in der Röhre, und erhält es in einer Höhe CD im Gleichgewichte, wo das Queckſilber in dem unteren Theile der Röhre CAR für ſich im Gleichgewichte iſt. Es drückt demnach die Atmoſphäre gegen die Fläche CE ſo ſtark als eine Queckſilberſäule, deren Grundfläche die Oeffnung CE, und die Höhe CD = 28 Pariſ. Zoll iſt. Da ferner die Dichtigkeit des Queckſilbers gegen 14mahl größer iſt, als die Dichtigkeit des Waſſers; ſo iſt eine Waſſerhöhe von 14 × 28 Zoll = 32⅔ Pariſ. Fuß mit der erwähnten Queck- ſilberhöhe von 28 Zoll gleichgültig. Daher iſt die dem Drucke der Atmoſphäre auf die Oberfläche des Mee- res zugehörige Höhe ungefähr gleich 32 Pariſ. Fuß. Fig. 20

Wenn man den erwähnten Verſuch unmittelbar mit Waſſer vornimmt; ſo erhält man das Nähmliche, was die Vergleichung des Queckſilbers mit dem Waſſer gab; wel- ches auch durch folgenden Verſuch beſtätiget werden kann.

Es ſey HQ Fig. 21 eine lothrecht ſtehende Röhre, 21
deren offenes Ende Q in einen mit Waſſer angefüllten Be- hälter MCDN getauchet iſt. In einer ſolchen genau cylin- driſchen Röhre ſey ein genau paſſender Kolben oder Stäm- pel befindlich. Wenn man nun den Kolben in die Höhe zieht, ſo ſteigt das Waſſer in der Röhre ſo hoch bis es ungefähr 32 Fuß über der Oberfläche des Waſſers im Be- hälter ſtehen bleibt. Weiter als bis zu dieſer Höhe folget es dem Kolben nicht nach, wenn man ſolchen gleich noch viel höher hinauf zieht. Wenn nähmlich der ehevor im Waſſer ganz eingetauchte Kolben, wo ſich zwiſchen ſeiner unteren Fläche und dem Waſſer keine Luft befand, in die Höhe gezogen wird; ſo entſteht unter demſelben ein leerer Raum, in welchen die äußere Luft nicht eindringen kann. Der Druck der Atmoſphäre auf die Oberfläche des Waſſers

Fig. im Behälter verurſachet nun durch ſeine Fortpflanzung, daß
21 das Waſſer durch die Oeffnung Q in die Röhre hineingetrieben, und auf eine ſolche Höhe gebracht wird, bis der Druck einer ſolchen erhöheten Waſſerſäule mit dem Drucke der Atmoſphäre im Gleichgewichte iſt. Man findet am Horizonte des Weltmeeres dieſe Höhe von beyläufig 32 Pariſ. Fuß. Das äußerſte Ende der cylindriſchen Röhre unter dem Waſſerſpiegel kann auch in ein enges Röhrchen auslaufen, wie bey den bekannten Handſpritzen, die ſich bey der Hervorziehung des Stämpels aus eben der angeführten Urſache mit Waſſer anfüllen. In älteren Zeiten, da man die Eigenſchaften der Schwerkraft noch nicht kannte, glaubte man, der Abſcheu der Natur vor dem leeren Raume (horror vacui) ſey die Urſache des Steigens des Waſſers in der Röhre bey dem letzt angeführten Verſuche. Sobald man wahrnahm, daß dieſes Steigen ſeine Gränzen habe, welche zugleich von den Dichtigkeiten der flüſſigen Maſſen abhingen, erkannte man gar bald die wahre Urſache dieſer Erſcheinung.

§. 62.

Die zu dem ehevor angeführten Verſuche dienende mit Queckſilber gefüllte gläſerne Röhre, die in ein Gefäß mit Queckſilber verkehrt hineingeſteckt wird, heißt die Torricelliſche Röhre, weil Johann Evangeliſta Torricelli ein Schüler des berühmten Gallilài im Jahre 1643 zuerſt dieſen Verſuch angeſtellet hat. Auch heißt der leere Raum im obern Theile der Röhre, wozu der äußeren Luft aller Zugang abgeſchnitten iſt, die Torricelliſche Leere. Die Veranlaſſung zu dem ſo folgereichen Torricelliſchen Verſuche gab ein Gärtner zu Florenz, der mittelſt einer Pumpenröhre ungefähr wie Fig. 21 das Waſſer über 18 Ellen oder über 32 Fuß heben wollte, und nicht konnte.

§. 63.

Schließt man bey dem im 61. §. erwähnten Torricel-
20 liſchen Verſuche das Gefäß in GF Fig. 20. luftdicht zu, ſo daß die zwiſchen MN und GF enthaltene Luft mit der äußern gar keine Gemeinſchaft hat, ſo muß dieſe eingeſchloſ-

ſchloſſene Luft eben das bewirken, was vorher die ganze Fig. Atmoſphäre bewirkte; ſie muß nähmlich eben der Queck- 20 ſilberſäule CD wie ehevor, nun zwar nicht mehr durch ihre Schwere, ſondern durch ihre Elaſticität das Gleichgewicht halten. Würde ferner die ſo eingeſchloſſene Luft mehr erwärmet; ſo würde ihre Elaſticität dadurch vergrößert, und das Queckſilber auf eine größere Höhe erhoben werden.

Da übrigens die Luft in einem Zimmer durch mancherley Oeffnungen mit der äußeren in Verbindung iſt, ſo iſt ſie darin immer ſo zuſammen gedrückt, daß ſie mit dem Drucke der äußeren Luft von einer verſchiedenen Temperatur im Gleichgewichte ſteht. Der Torricelliſche Verſuch bleibt daher eben derſelbe, er mag in einem gewöhnlich zugemachten Zimmer, oder unter freyem Himmel vorgenommen werden. Im erſten Falle leiſtet die Luft das durch Elaſticität, was ſie im zweyten unmittelbar durch ihr Gewicht wirket.

§. 64.

Wird die Toricelliſche Röhre (62. §.) auf ein lothrechtes Brett befeſtiget, und mit einer Eintheilung von Zollen und Linien verſehen, von der unteren Oberfläche an gezählet, ſo bekommt ſie den Nahmen eines Barometers, eines Inſtrumentes, wodurch man das Gewicht der Luft finden ſoll; eigentlich aber findet man nur die Elaſticität derſelben.

Die Höhe, auf welcher das Queckſilber in der Torricelliſchen Röhre ſteht, heißt die Barometerhöhe. Dieſe iſt wegen der von der Oberfläche der Erde abnehmenden Dichtigkeit der atmoſphäriſchen Schichten in verſchiedenen Erhöhungen über den Meerhorizont verſchieden.

Auch ſelbſt an einem und demſelben Orte iſt die Barometerhöhe verſchiedenen Veränderungen unterworfen, die gegen 2 Zolle betragen, weil verſchiedene Umſtände, als Feuchtigkeit, Dünſte, Luftſtröme, die Elaſticität der Luft verändern können; da denn bald eine kürzere bald eine längere Zeit zur Herſtellung des Gleichgewichtes erforderlich iſt.

Das

Fig. Das arithmetiſche Mittel zwiſchen der größten und kleinſten Barometerhöhe, welche an einem und demſelben Orte durch längere Zeit wenigſtens durch ein Jahr beobachtet worden iſt, heißt die **mittlere Barometerhöhe** desſelben Ortes.

Ob die mittlere Barometerhöhe eines und desſelben Ortes immer beynahe einerley verbleibe, oder ob ſie gewiſſen Veränderungen unterworfen ſey, müſſen die Beobachtungen künftiger Zeiten beſtimmen. Man will vor wenigen Jahren die Entdeckung gemacht haben, daß zwey gewiſſe in unſerer Atmoſphäre vorfindige Luftgattungen in einem gewiſſen Verhältniſſe vermiſchet, und von einem electriſchen Funken entzündet ſich in Waſſer verwandeln. Wenn nun der Regen, der bey heftigen electriſchen Erſchütterungen der Atmoſphäre gemeiniglich zu fallen pflegt, von der Verwandlung ſolcher Luftgattungen in Waſſer herrühret; und wenn vielleicht mehr Waſſer in Geſtalt des Regens aus der Atmoſphäre auf die Erde fallen ſollte, als von dieſer an luftförmigen Stoffen hinaufſteigt: ſo müßte die mittlere Barometerhöhe an einem und demſelben Orte von Zeit zu Zeit kleiner werden; im entgegen geſetzten Falle aber zunehmen.

Bey den gewöhnlichſten Barometern iſt der offene Theil der gläſernen Röhre umgebogen, und mit einem angeſchmolzenen länglichten kugelförmigen Gefäße verſehen. Der Querdurchmeſſer dieſer Kugel ſollte wenigſtens 10 bis 12mahl größer ſeyn als die innere Weite der Röhre, damit bey einer Veränderung der Barometerhöhe von $1\frac{1}{2}$ bis 2 Zoll der Stand der Oberfläche des Queckſilbers in der Kugel, als der Anfangspunct des Barometer-Maßſtabes, ſich nicht merklich ändert. Zu genauen Barometer-Beobachtungen ſind die beſten die ſogenannten **Heber-Barometer**, bey denen der umgebogene offene Schenkel mit dem längeren oben zugeſchmolzenen einerley Weite hat. Bey dergleichen Barometern wird der Anfangspunct der Eintheilung in der Gegend der Mündung des umgebogenen Schenkels angenommen. Dadurch erhält man die Barometerhöhe, wenn man

die

die Abſtände beyder Oberflächen des Queckſilbers von dem bemerkten Anfangspuncte zuſammen addiret. Um dieſe bequemer zu erhalten, pflegt man entweder den Maßſtab, oder aber die ganze Barometerröhre auf dem Barometerbrette um einige Zolle auf- und abwärts beweglich zu machen, damit man durch eine leichte Verſchiebung den Anfangspunct des Barometer-Maßſtabes bey einer zu machenden Beobachtung mit der Oberfläche des Queckſilbers im offenen Schenkel in eine Ebene zuſammen bringen könne. Fig.

§. 65.

Wenn man die Barometerhöhe an einem beſtimmten Orte beobachtet; ſo läßt ſich der Druck, den jede gegebene Fläche von der Atmoſphäre in dieſer Gegend zu dieſer Zeit leidet, leicht berechnen. Findet man z. B. die Barometerhöhe = 28 Wiener Zoll, und das ſpecifiſche Gewicht des Queckſilbers = 13,600; ſo iſt der Druck auf eine Fläche von einem Wien. Quadratfuß = $13{,}6 \times 56\frac{3}{8} \times \frac{28}{12} =$ 1789 Wien. Pfund ſehr nahe, weil 1 Wien. Kub. Fuß Regenwaſſer $56\frac{3}{8}$ Wien. Pfund wiegt. An einem hohlen Würfel, deſſen jede Seite 1 Fuß beträgt, wird daher bey der Barometerhöhe von 28 Wien. Zoll jede der 6 Seitenflächen mit einer Gewalt von 1789 Wien. Pfund nach einer darauf ſenkrechten Richtung von der Atmoſphäre hineinwärts gedrückt. Daß deſſen ungeachtet die Seitenflächen des hohlen Würfels nicht hineingebogen werden, verhindert die von innen nach außen eben ſo ſtark wirkende Elaſticität der im hohlen Würfel befindlichen Luft. Aus derſelben Urſache empfinden wir auch den ungemein großen Druck nicht, den die Atmoſphäre von allen Seiten gegen die Oberfläche unſeres Körpers ausübet.

§. 66.

Wenn auf eine tropfbare Flüſſigkeit die Luft an zwey Stellen drückt, an der einen durch ihr Gewicht, an der andern aber (in einem Gefäße oder ſonſt eingeſchloſſen) durch ihre Elaſticität; ſo kann das Gleichgewicht nur in ſo fern beſtehen, als der Druck der Atmoſphäre eben ſo groß iſt, wie die Elaſticität der eingeſchloſſenen Luft. Wird die einge-

Fig. geſchloſſene Luft verdünnet, und dadurch ihre Elaſticität vermindert; ſo wird die tropfbare Flüſſigkeit durch den überwiegenden Druck der äußeren Luft in das Gefäß getrieben, und ſteigt ſo hoch, bis der ſenkrechte Druck der aufgeſtiegenen Säule und die noch übrige Elaſticität der etwa noch vorhandenen eingeſchloſſenen Luft mit dem Drucke der äußeren Luft im Gleichgewichte iſt. Das entgegen Geſetzte geſchieht, wenn die eingeſchloſſene Luft verdichtet, oder ihre Elaſticität ſonſt vergrößert wird.

Hierauf gründet ſich das Anſaugen einer trinkbaren Flüſſigkeit mittelſt einer hinein geſteckten Röhre, die Wirkung des Saugens der Kinder, des gewöhnlichen Trinkens, Tabackrauchens, wie auch verſchiedener Waſſer-Hebmaſchinen: als Pumpenkünſte, Heber, u. ſ. w. wovon weiter unten gehandelt werden wird.

§. 67.

Die Dichtigkeit und Elaſticität der Luft bey einerley Wärme und Trockenheit iſt der zuſammen drückenden Kraft proportionirt.

Dieſer Satz wird durch folgenden Verſuch erwieſen.

22 1) Eine gläſerne Röhre ABC Fig. 22 ſey dergeſtalt gebogen, daß beyde Schenkel AD, EC lothrecht ſeyn; der kürzere Schenkel EC durchaus von gleicher Weite ſey etwa 2 bis 3 Linien im Durchmeſſer, beyläufig 6 Zoll lang, und oben in C inwendig flach zugeſchmolzen, oder luftdicht verſchraubet; der längere Schenkel AD habe eine Länge von 6 bis 8 Fuß, und ſey oben in A offen.

Füllet man nun die untere Krümmung zu einer Zeit, wo ſich die Temperatur und Elaſticität der Luft nicht merklich ändert, dergeſtalt mit Queckſilber, daß es ſich genau in eine horizontale Ebene PDEQ ſtellet; ſo iſt die eingeſchloſſene Luft in EC mit der atmoſphäriſchen im offenen Schenkel auf PD drückenden Luft von einerley Dichtigkeit und Elaſticität; folglich mit dieſer von einerley Kraft zuſammen gedrückt, welche der zu dieſer Zeit allda ſtattfindenden Barometerhöhe $= k$ zukommt.

Schüt-

Schüttet man ſodann in A mehreres Queckſilber hin- ein, daß es im langen Schenkel die Höhe DH $= a$, im kurzen aber die Höhe EF $= b$ über die ehevor bemerkte Horizontalinie DE habe; ſo wird die Höhe des Queckſilberdruckes, womit nun die Luft in dem Raume CF zuſammen gepreſſet iſt, aus $k + a - b$ beſtehen, da ehevor die Queckſilberdruckhöhe $= k$ war, als eben dieſelbe eingeſchloſſene Luft den Raum CE ausfüllte. Fig. 22

Durch dieſen Verſuch findet man immer

$$k : k + a - b = CF : CE$$

das iſt die Räume, in welche eine und dieſelbe Luft bey übrigens einerley Umſtänden durch verſchiedene zuſammen drückende Kräfte gebracht wird, verhalten ſich umgekehrt, wie die zuſammen drückenden Kräfte.

2) Ferner verhalten ſich die Dichtigkeiten einer und derſelben Menge Luft, welche durch verſchiedene zuſammen drückende Kräfte in verſchiedene Räume zuſammen gepreſſet wird, umgekehrt wie dieſe Räume. Wenn nähmlich der Raum CF, in welchen die anfänglich den Raum CE erfüllende Luft nun zuſammen gepreſſet iſt, nur $\frac{1}{n}$ des Raumes CE beträgt; ſo iſt die Dichtigkeit der Luft im Raume CF $n$mahl ſo groß, als ſie ehevor im Raume CE war.

Die Dichtigkeiten der Luft bey verſchiedenen zuſammen drückenden Kräften, übrigens aber einerley Umſtänden, verhalten ſich demnach gerade ſo wie die zuſammen drückenden Kräfte.

3) Da übrigens die zuſammen drückenden Kräfte allhier in demjenigen Zuſtande betrachtet werden, in dem ſie bey verſchiedenen Dichtigkeiten einer und derſelben Luft den damit verbundenen Elaſticitäten das Gleichgewicht halten; ſo verhalten ſich auch die elaſtiſchen Kräfte einer und derſelben Luft bey verſchiedenen Zuſammenpreſſungen, doch übrigens einerley Umſtänden, gerade wie die Dichtigkeiten dieſer verſchiedentlich zuſammen gepreßten

Luft.

Fig. 22 Luft. Wird nähmlich eine Luftmenge bey einerley Wärme und Trockenheit durch Zuſammenpreſſung $n$mahl dichter; ſo wird auch ihre Elaſticität $n$mahl größer als im vorigen Zuſtande.

Es iſt daher aus dem angeführten Verſuche erwieſen, daß die Dichtigkeit und Elaſticität der atmoſphäriſchen Luft, bey einerley Wärme und Trockenheit, der zuſammen drückenden Kraft proportional iſt.

Anmerkung. Mariotte, ein franzöſiſcher Naturforſcher, ſtellte dieſen Verſuch zuerſt an, und entdeckte das angeführte Verhältniß, welches man auch daher das Mariottiſche Geſetz der Luftelaſticität nennt.

Wenn nähmlich CE = 12 Zoll, k = 28 Zoll war; ſo fand er

für $\begin{cases} a = \text{DH} = 18; & 34; & 93 \text{ Zoll} \\ b = \text{EF} = 4; & 6; & 9 \end{cases}$

den Raum CF = 8; 6; 3;

wo die Proportionen ſtatt finden

$28 : 28 + 18 - 4 = 8 : 12$; nähmlich $28 : 42 = 8 : 12$
$28 : 28 + 34 - 6 = 6 : 12$ $\quad 28 : 56 = 6 : 12$
$28 : 28 + 93 - 9 = 3 : 12$ $\quad 28 : 112 = 3 : 12$

Nach Mariotte hat man dieſen Verſuch vielfältig wiederhohlet, und das angeführte Geſetz bey einer 8fachen Verdichtung der Luft noch immer zutreffend befunden.

§. 68.

Das angeführte Mariottiſche Geſetz (§. 67.) findet auch bey den Verdünnungen der Luft ſtatt; wovon man ſich auf folgende Art überzeugen kann.

23 Eine durchaus gleichweite gläſerne Röhre AB Fig. 23 etwa 3 bis 4 Linien weit, in A anfänglich verſchloſſen, in B offen, werde bis D mit Queckſilber angefüllet, hierauf in B mittelſt einer genau paſſenden Schraube, oder ſonſt mittelſt einer ſchicklichen Verkůttung luftdicht verſchloſſen, und ſodann in ein hinlänglich weites Gefäß mit Queckſilber ſo

ge-

geſtecket, daß CB $= b$ hervorraget. Wird nun die Röhre in A geöffnet; ſo wird die in dem Raume DB $= a$ befindliche Luft, deren Elaſticität dem Drucke der äußeren Luft bey einerley Temperatur das Gleichgewicht hält, und durch die zu dieſer Zeit allda ſtatt findende Barometerhöhe gegeben iſt, das Queckſilber bis H herabtreiben, und ſich in dem Raume BH $= y$ ſoweit verbreiten, bis der äußere Druck der Atmoſphäre mittelſt der Fortpflanzung ſowohl der Queckſilberſäule CH $= b - y$, als auch der Elaſticität der in BH verbreiteten Luft zuſammengenommen, das Gleichgewicht hält. Fig. 23

Iſt nun die zu dieſer Zeit an dem Orte des Verſuches ſtatt findende Barometerhöhe $= k$, welche mit dem Drucke der äußeren Luft, folglich auch mit der Elaſticität der anfänglich in DB eingeſchloſſenen Luft im Gleichgewichte iſt; und man ſetzt die Höhe einer Queckſilberſäule $= e$, welche mit der Elaſticität der nun verdünnten im Raume BH verbreiteten Luft das Gleichgewicht halten könnte: ſo findet man, wenn das Mariottiſche Geſetz auch hier bey der Verdünnung der Luft richtig iſt, diese Höhe e durch folgende Proportion

$$\text{BH } (y : \text{BD } (a = k : e, \text{ nähmlich } e = \frac{ak}{y}.$$

Der äußere Druck der Atmoſphäre iſt demnach hier mit der Queckſilberſäule CH $= b - y$ ſammt der Elaſticität $\frac{ak}{y}$ der in BH verbreiteten Luft im Gleichgewichte;

$$\text{folglich iſt } b - y + \frac{ak}{y} = k.$$

Dieſes gibt die quadratiſche Gleichung

$y^2 - (b - k)\, y = ak$; und endlich

$y = \frac{1}{2}(b - k) + \sqrt{(ak + \frac{1}{4}(b-k)^2)} = \text{BH}.$

Hieraus folgt nun auch die Höhe der in der Röhre ſtehen gebliebenen Queckſilberſäule

$b - y = \frac{1}{2}(b + k) - \sqrt{(ak + \frac{1}{4}(b-k)^2)} = \text{CH}.$

Bey

Fig. 23 Bey ſorgfältig angeſtellten Verſuchen, wo man alles immer in einerley Temperatur zu erhalten trachten muß, ſtimmen nun die Erfolge immer mit der angegebenen Berechnung überein; daher findet das angeführte Mariottiſche Geſetz auch bey den Verdünnungen der Luft ſtatt.

Z. B. für $k = 28$, $b = 30$, $a = 2\frac{1}{4}$ Zoll findet man $y = BH = 9$, und $CH = 21$ Zoll.

Dergleichen Verſuche ſind vielfältig bey verſchiedenen Veränderungen der Luft, von den franzöſiſchen Gelehrten Bouguer und Condamine auch auf den höchſten Gebirgen in Amerika, wo die Barometerhöhe nur 16 Zoll war, angeſtellet worden; und man hat das erwähnte Mariottiſche Geſetz überall beſtätiget gefunden.

Anmerkung. Der letzte Verſuch läßt ſich auf eine leichtere Weiſe auch ſo anſtellen, daß man eine durchaus gleichweite Glasröhre wie beym Torricelliſchen Verſuche (62. §.) nur zum Theil mit Queckſilber füllet, und darüber in einer feſtgeſetzten Länge $= a$ die Luft ſtehen läßt; dann die Oeffnung mit dem Finger feſt zu hält, die Röhre ſodann umkehret, und die Luft in das andere Ende der Röhre gänzlich hinaufſteigen läßt; hierauf die mit dem Finger geſchloſſene Oeffnung der Röhre in das Gefäß mit Queckſilber einſetzt, den Finger wegzieht, und die aus dem Queckſilber lothrecht hervorragende Höhe der Röhre $CB = b$, wie auch die Länge $BH = y$ merket. In dieſer Länge y iſt nun die eingeſchloſſene Luft verbreitet, und hält mit der noch beyhabenden Elaſticität und mit der ſtehen gebliebenen Queckſilberſäule $b - y$ dem Drucke der Atmoſphäre, oder der zu dieſer Zeit allda ſtatt findenden Barometerhöhe $= k$ das Gleichgewicht. Bey dieſem Verſuche beſtimmet man mit eben derſelben Röhre und mit demſelben Queckſilber die Barometerhöhe k, welche zu dieſer Zeit Statt findet.

Soll im letzten Verſuche die in BH verbreitete Luft $n$mahl dünner werden, als ſie ehevor in BD war; ſo ſetze man $y = na$, bringe dieſen Werth in die obige Gleichung, und ſuche daraus $a = BD$: ſo findet man

$$a = \frac{k + n(b - k)}{n^2}.$$ Fig. 23

Z. B. für $n = 4$, $k = 28$, $b = 30$ Zoll, iſt $a = 2\frac{1}{4}$ Zoll = BD wie ehevor.

§. 69.

Aus dem angeführten Mariottiſchen Geſetze (67. §.) läßt ſich nun darthun, daß bey einerley Wärme an verſchiedenen in arithmetiſcher Progreſſion auf einander folgenden Erhöhungen über einem beliebigen Horizonte die Dichtigkeiten und Elaſticitäten der atmosphäriſchen Luft, ſowie auch die dazu gehörigen Barometerhöhen in einer geometriſchen Progreſſion abnehmen; und daß man aus den gleichzeitigen Beobachtungen der Barometerhöhen an verſchiedenen Erhöhungen, oder auch aus den bekannten mittleren Barometerhöhen verſchiedener Orte deren Höhenunterſchiede finden könne. Dieſes iſt im 2ten Theile meiner mathem. Vorleſ. in den Anfangsgründen der practiſchen Meßkunſt umſtändlich gezeigt worden, und kann hier nachgeleſen werden. Indeſſen wird es nicht überflüſſig ſeyn, dieſelben Wahrheiten auf eine kürzere Art mittelſt der Infiniteſimal-Rechnung abzuleiten; und zwar auf folgende Art.

1) Es ſeyen A, C, Fig. 24 zwey Orte in verſchiedenen Erhöhungen über eben demſelben Horizonte; die zu A, C, zugehörigen Barometerhöhen bey einerley Temperatur ſeyen a, c; die Dichtigkeit aber, oder das eigenthümliche Gewicht der Luft bey A verhalte ſich zum eigenthümlichen Gewichte des Queckſilbers wie 1 zu α (nähmlich das eigenthümliche Gewicht der Luft bey A ſey $= \frac{1}{\alpha}$ für das eigenthümliche Gewicht des Queckſilbers $= 1$); ſo iſt bey einerley Temperatur die Dichtigkeit oder das eigenthümliche Gewicht der Luft an C nach dem Mariottiſchen Geſetze $= \frac{c}{\alpha a}$. 24

2) Die Erhöhung AC ſey $= x$, und CD $= dx$, unendlich klein; ſo kann die Luft in dieſer Schichte von der

Di-

Fig. 24 Dicke dx für gleichförmig dicht angeſehen werden. Die Veränderung, um welche die Barometerhöhe von C bis D abnimmt, ſey dc; ſo kann dc auf folgende Art ausgedruckt werden. Eine Queckſilberſäule von der Höhe dc iſt mit einer gleichförmig dichten Luftſäule von der Höhe dx, wie in vereinigten Röhren zwey ſchwere Flüſſigkeiten von verſchiedenen Dichtigkeiten, im Gleichgewichte; deßwegen verhalten ſich (wegen §. 18.) die Höhen dc und dx verkehrt wie die eigenthümlichen Gewichte der Luft in der Schichte CD, und des Queckſilbers, nähmlich $dc : dx = \frac{c}{\alpha a} : 1$; und daher $dc = \frac{c dx}{\alpha a}$; oder eigentlich $dc = -\frac{c dx}{\alpha a}$; weil c abnimmt, wenn x wächſt.

3) Aus der letzten Gleichung folgt ferner

$$\int dx = -\alpha a . \frac{\int dc}{c} + \text{Const.}$$ nähmlich

$$x = -\alpha a . \text{lognat.}\, c + \text{Const.}$$

Nun iſt für $x = 0$ die Barometerhöhe $c = a$; folglich $\text{Const.} = \alpha a . \text{lognat}\, a$; und $x = \alpha a . \text{lognat}\, \frac{a}{c}$.

4) Die letzte Gleichung kann man auch ſo ſchreiben; $\frac{x}{\alpha a} . 1 = \text{lognat}\, \frac{a}{c}$, $\frac{x}{\alpha a} . \text{lognat}\, h = \text{lognat}\, \frac{a}{c}$, und $h^{\frac{x}{\alpha a}} = \frac{a}{c}$ für die Grundzahl des natürlichen logarithmiſchen Syſtems $= h$.

Und daraus folgt $c = \frac{a}{h^{\frac{x}{\alpha a}}}$; woraus es zu erſehen iſt, daß an verſchiedenen in einer arithmetiſchen Progreſſion auf einander folgenden Erhöhungen x über einen und denſelben Horizont bey einerley Tempera-

tur

tur die dazu gehörigen Barometerhöhen in einer geo- Fig.
metriſchen Progreſſion abnehmen. 24

5) Es ſey die Erhöhung AB $= B$ gemeſſen, und an B die Barometerhöhe $= b$ beobachtet;

ſo iſt wegen 3) $B = \alpha a.\ \text{lognat}\ \frac{a}{b}$;

und daraus folgt $\alpha = \frac{B}{a\ \text{lognat}\ (a : b)}$.

6) Man ſetze den Werth 5) in 3), ſo iſt

$x = \frac{B.\text{lognat.}\ (a : c)}{\text{lognat}\ (a : b)}$; oder auch $x = \frac{B.\text{log. vulg.}\ (a : c)}{\text{log. vulg.}\ (a : b)}$.

7) Man findet durch Vergleichung mehrerer Beobachtungen, daß am Meerhorizonte die mittlere Barometerhöhe $a = 345$ Wien. Duodec. Linien iſt; und daß in einer Erhöhung von $25\frac{1}{4}$ Wien. Klaft. über den Meerhorizont die Barometerhöhe um 2 Wien. Duod. Linien abnimmt, alſo in dieſer Erhöhung nur 343 Wiener Linien gleich iſt.

Setzt man nun in 6) $a = 345$, $b = 343$ Lin. und $B = 25\frac{1}{4}$ Klaft.; ſo iſt die Erhöhung eines Ortes C, deſſen mittlere Barometerhöhe c Lin. beträgt, über die Meeresfläche

$$x = \frac{25\frac{1}{4}.\ \log.(345 : c)}{\log.\ (345 : 343)} = 10000.\ (\log 345 - \log c)$$

Wien. Klafter.

Und eben ſo iſt die Erhöhung x' eines anderen Ortes über die Meeresfläche, deſſen mittlere Barometerhöhe c' W. L. beträgt,

$x' = 10000.\ (\log 345 - \log c')$ W. K.

Es iſt alſo auch

$$x' - x = 10000.\ (\log 345 - \log c') - 10000.\ (\log 345 - \log c) = 10000.\ (\log c - \log c')\ \text{W. K.}$$

oder wenn man den Höhenunterſchied zweyer Oerter

Fig. 24 $x' - x = y$, und die dazu gehörigen Barometerhöhen a, b ſetzet ſo iſt

$$y = 10000\ (\log a - \log b)\ \text{W. Klaft.}$$

8) Mittelſt der Formel $\alpha = \dfrac{B}{a(\text{lognat}\, a - \text{lognat}\, b)}$ in 5) läßt ſich aus dem Höhenunterſchiede B, zweyer Oerter A, B, und aus den dazu gehörigen mittleren Barometerhöhen a, b, die Dichtigkeit der Luft α am Orte A berechnen, wo der Zähler B und der Coefficient a des Nenners in einerley Maß ausgedruckt ſeyn müſſen. Z. B.

Die Höhe des Berges Pico auf der Inſel Teneriffa beträgt 13158 Par. Fuß $= B$; die Barometerhöhe am Fuße dieſes Berges fand man durch Beobachtungen 334 Par Lin. $= \dfrac{167}{72}$ Fuß $= a$, und zur nähmlichen Zeit am Gipfel des Berges die Barometerhöhe 209 Par. Lin $= b$; daraus folget die Dichtigkeit der Luft am Fuße des Berges Pico in Hinſicht auf das Queckſilber.

$$\alpha = \frac{13158 \times 72}{167 \cdot (\text{lognat}\ 334 - \text{lognat}\ 209)}$$

$$= \frac{13158 \times 72}{167 \times 0{,}4688067} = 12100.$$

Da ferner die Dichtigkeit des Queckſilbers, wie es gewöhnlich zu Barometern verwendet zu werden pflegt, beyläufig 13,6mahl ſo groß ſeyn dürfte, als die Dichtigkeit des Regenwaſſers; ſo iſt die Luft am Fuße des Berges Pico 889 mahl dünner oder ſpecifiſch leichter als Regenwaſſer.

9) Aus der Formel 7) $y = 10000\ (\log a - \log b)$ folgt $\log a = \log b + 0{,}0001\, y$;
und $\log b = \log a - 0{,}0001\, y$.

Aus dem in W. Klft gegebenen Höhenunterſchiede y zweyer Oerter, und aus der Barometerhöhe des einen Ortes läßt ſich daher die Barometerhöhe des anderen Ortes beſtimmen.

10)

10) Die letzte Gleichung kann man auch ſo ſchreiben Fig

$$\log \text{vulg}\ \frac{a}{b} = 0{,}0001\,y\text{, und}$$

$$\text{lognat}\ \frac{a}{b} = 0{,}0002302585\,y\,;$$

daraus folgt für die Grundzahl h des natürlichen logarithmiſchen Syſtems

$$\frac{a}{b} = h^{0{,}0002302585\,y}$$

11) Da übrigens bey einerley Temperatur die mit den Barometerhöhen a, b zuſtimmenden Dichtigkeiten der Luft α, β, ſich wie die Barometerhöhen verhalten; ſo iſt

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}\text{; und daher auch } \frac{\alpha}{\beta} = h^{0{,}0002302585\,y}\,;$$

daraus folgt

$$\alpha = \beta\,.\,h^{0{,}0002302585\,y} \quad \text{und } \beta = \alpha\,.\,h^{-0{,}0002302585\,y}\,.$$

Mann kann daher aus dem in W. Klaft. gegebenen Höhenunterſchiede y zweyer Oerter, und aus der Dichtigkeit der Luft an einem dieſer zwey Oerter, die Dichtigkeit der Luft am anderen Orte bey einerley Temperatur berechnen.

Fig.

II. Abſchnitt.

Von der Luftpumpe, und von einigen anderen aerometriſchen Werkzeugen.

§. 70.

Die Wirkungen des Druckes der Luft durch ihr Gewicht und durch ihre Elaſticität hat man insbeſondere mittelſt der Luftpumpe kennen gelernet. Die Luftpumpe iſt ein Werkzeug, wodurch man die Luft in einem Gefäße verdünnen und verdichten kann.

Zur Structur einer Luftpumpe gehören folgende weſentliche Theile. Fig. 25. 25

1) Ein hohler metallener Cylinder, der Stiefel AB mit einem genau paſſenden Stämpel oder Kolben C, der mittelſt der Kolbenſtange CD in dem Stiefel durch eine mechaniſche Vorrichtung ſich hinauf und hinunter bewegen läßt, und am Boden des Stiefels ſo genau als möglich anſchließt.

2) Eine vom Boden des Stiefels B ausgehende, und am anderen Ende in die Höhe gekehrte Verbindungsröhre PHF.

3) Ein metallener recht eben abgeſchliffener Teller TL mit einer Oeffnung in der Mitte, wodurch ſolcher an das Ende F der Verbindungsröhre feſt angeſchraubet, und mit einem naſſen Leder belegt wird.

4) Der Recipient, gewöhnlich eine gläſerne Glocke, deren unterer Rand recht eben abgeſchliffen iſt; damit ſolcher an den Teller mittelſt des zwiſchen liegenden feucht gemachten Leders recht gut anſchließe. Anſtatt der Glocke wird zuweilen an die Oeffnung F der Verbindungsröhre ein me-

metallenes Gefäß mit einem engen Halſe, durch den ein gera- de durchbohrter Wirbel oder Hahn geht, feſt angeſchraubet. Fig. 25

5) Der Hahn oder Wirbel P mit einem coniſchen wohl abgeſchmiergelten Zapfen in der Verbindungsröhre, welcher auf zweyerley Art ſenkrecht auf ſeine Achſe über einander durchgebohret iſt. Einmahl geradlinig, daß nur ein Weg durch ihn aus dem Recipienten in den Stiefel geht. Zweytens ſchiefwinkelig, ſo daß nur ein Weg durch ihn aus freyer Luft in die Verbindungsröhre einmahl nach F in den Recipienten, ein anderes Mahl bey dazu gehöriger Drehung nach C in den Stiefel geht. Dabey muß auch bey gehöriger Drehung des Wirbels die Verbindung zwiſchen dem Stiefel und Recipienten gänzlich geſperret werden können.

§. 71.

Der Gebrauch der Luftpumpe zur Verdünnung der Luft erfordert folgende Arbeiten.

1) Man ſtelle den Hahn P ſo, daß der Weg aus freyer Luft in den Stiefel offen ſey, und ſtoße den Kolben bis an den Boden B des Stiefels.

2) Darauf drehe man den Hahn P ſo, daß der Weg vom Recipienten in den Stiefel offen ſey, und ziehe den Kolben bis gegen A herauf; ſo wird die Luft im Recipienten ſich ausbreiten, und zugleich den Raum des Stiefels ausfüllen, folglich ſich verdünnen. Nun ſtelle man den Hahn P wieder ſo, daß nur der Weg aus freyer Luft in den Stiefel offen ſey, und ſtoße abermahl den Kolben bis an den Boden des Stiefels; ſo wird die aus dem Recipienten in den Stiefel eingedrungene Luft hinausgetrieben. Hierauf drehet man wieder den Hahn P ſo, daß der Weg vom Recipienten in den Stiefel offen ſey, und zieht den Kolben abermahl bis A herauf, damit die im Recipienten befindliche ſchon etwas verdünnte Luft vermöge ihrer Elaſticität zum Theil in den Stiefel trete, und ſich dadurch noch mehr verdünne.

Das einmahlige Einſtoßen und Aufziehen des Kolbens auf die erwähnte Art heißt eine Auspumpung; wodurch

Fig. 25 die Luft im Recipienten im Verhältniße des Raums des Recipienten bis zum Hahne P zur Summe der Räume des Recipienten und des Kolbenzuges ſammt der Verbindungsröhre verdünnet worden iſt. Durch eine zweyte Auspumpung wird dieſe verdünnte Luft abermahls verdünnet. So wird nach wiederhohlten Auspumpungen die Luft im Recipienten immer dünner. Dabey erhält der Druck der äußeren Luft auf den Recipienten das Uebergewicht über den Elaſticitätsdruck der eingeſchloſſenen verdünnten Luft; und drücket dadurch den Recipienten, wenn ſolcher eine Glocke iſt, immer ſtärker gegen den Teller an. Wenn die Luft durch das Auspumpen gänzlich herausgebracht werden könnte; ſo wäre der Druck der Glocke gegen den Teller ſo groß, als das Gewicht einer Queckſilberſäule auf der Grundfläche der Glocke von der Länge der damahls ſtatt findenden Barometerhöhe. Die obere Wölbung der Glocke hat auf den Druck gegen den Teller keinen Einfluß, trägt aber dazu bey, daß ſie dem Drucke der Atmoſpäre um ſo leichter wiederſteht.

§. 72.

Der Gebrauch der Luftpunpe zur Verdüchtung der Luft beſteht im folgenden.

1) Bey dem gänzlich hineingeſtoßenen Kolben ſtelle man den Hahn P ſo, daß der Weg aus freyer Luft in den Recipienten offen ſey; ſo wird die Luft darin mit der atmoſphäriſchen in einerley Zuſtande ſeyn.

2) Darauf drehe man den Hahn ſo, daß der Weg aus freyer Luft in den Stiefel offen ſey, und ziehe den Kolben vom Boden B des Stiefels bis A heran, ſo wird die atmoſphäriſche Luft den Stiefel anfüllen.

3) Nun ſtelle man den Hahn P ſo, daß der Weg aus dem Stiefel in den Recipienten offen ſey, und ſtoße den Kolben von A bis an den Boden B hinein; ſo wird die Luft aus dem Stiefel in den Recipienten hineingetrieben, und kommt zu der darin ſchon befindlichen hinzu, welche dadurch verdichtet wird. Dieſes einmahlige Aufziehen und Einſtoßen des Kolbens heißt eine Compreſſion

der

der Luft. Dadurch wird die Luft in dem an die Verbindungsröhre bey F angeſchraubten Recipienten im Verhältniſſe des Raumes des Recipienten zur Summe des Raumes des Recipienten und Stiefels verdichtet. Fig. 25

4) Stellet man ſodann den Hahn P wieder ſo, daß nur der Weg aus freyer Luft in den Stiefel offen ſey, ziehet den Kolben auf, öffnet mittelſt gehöriger Drehung des Hahns die Verbindung zwiſchen dem Recipienten und Stiefel; und ſtößt ſodann den Kolben bis an den Boden des Stiefels; ſo wird die in den Stiefel eingetretene atmoſphäriſche Luft abermahl zu der im Recipienten befindlichen ſchon etwas verdichteten Luft hineingetrieben, und auf dieſe Art noch mehr verdichtet. Durch dergleichen öfter wiederhohlte Compreſſionen kann immer mehr und mehr Luft in den Recipienten hineingetrieben, und darin verdichtet werden.

5) Will man die verdichtete, oder die nach dem vorigen Verfahren verdünnte Luft in dem aufgeſchraubten Gefäße zu irgend einem anderen Gebrauche aufbewahren; ſo muß der Hals des Gefäßes, ehe ſolches von der Verbindungsröhre abgenommen wird, mittelſt des daran befindlichen Hahnes geſchloſſen werden.

§. 73.

Anſtatt des Hahnes P in der Verbindungsröhre dienen auch ein Paar Klappen oder Ventile, die ſo eingerichtet ſind, daß ein Druck von einer Seite die Klappe öffnet, ein Druck von der anderen Seite aber ſie nur deſto feſter verſchließt. Ein Ventil iſt im Boden des Stiefels, um die Luft aus dem Recipienten in den Stiefel durchzulaſſen, wenn der Kolben aufgezogen wird. Das andere Ventil iſt im Kolben, wodurch die im Stiefel befindliche Luft beym Niederſtoßen des Kolbens ins Freye heraus geht. Dieſe Vorrichtung dienet zur Verdünnung der Luft. Um die äußere Luft wieder unter die Glocke zu laſſen, iſt die Verbindungsröhre wie ehevor mit einem Hahne P verſehen, den man bloß zu dieſem Ende öffnet.

Soll eine Luftpumpe mit Ventilen zur Verdichtung der Luft dienen; ſo haben die Ventile die umgekehrte Lage.

Fig. Auch kann alsdann das Ventil im Kolben wegfallen, und ſtatt deſſen ein Loch im Stiefel oben bey G gebohrt ſeyn, wodurch die äußere Luft eindringet, wenn der Kolben ſo hoch aufgezogen wird, bis ſeine Grundfläche dieſes Loch erreichet.

Von den mancherley Einrichtungen, die man den Luftpumpen zu geben pflegt, damit man mit ſolchen die Luft ſowohl verdünnen als verdichten kann, von der näheren Beſchreibung und Abbildung des Kolbens, der Hähne, Ventile, von dem zur Bewegung des Kolbens dienenden Mechanismus, und von ſonſtigen dazu gehörigen Geräthſchaften muß man umſtändliche Nachrichten in ausführlichen Lehrbüchern der Naturlehre, und in eigenen Beſchreibungen ſolcher Luftpumpen nachſchlagen.

Der erſte Erfinder der Luftpumpe war Otto von Guerike, Bürgermeiſter zu Magdeburg, der im Jahre 1654 zu Regensburg in Gegenwart Kaiſers Ferdinand III. und vieler Reichsfürſten mit ſeiner Luftpumpe verſchiedene Experimente machte. Darauf wurde dieſe Erfindung bald allgemein bekannt, und die Luftpumpe erhielt nach und nach verſchiedene Abänderungen, und Verbeſſerungen.

§. 74.

Zu den Luftpumpen gehöret auch die Windbüchſe, ein Flintenlauf mit einem Recipienten, die Windflaſche genannt, worin die Luft mittelſt einer Druckpumpe ſtark verdichtet wird. Durch das Niederſchlagen des Hahnes wird das Ventil des Recipienten geöffnet, aber durch eine inwendig angebrachte Feder ſogleich wieder verſchloſſen; wodurch die inzwiſchen aus dem Recipienten in den Flintenlauf eingedrungene Luft die im letzteren befindliche Kugel mit großer Geſchwindigkeit hinaustreibt.

§. 75.

Aufgabe.

Nach einer gegebenen Zahl der Auspumpungen zu finden, wie vielmahl die Luft im Recipienten verdün-

dünnet ſey; vorausgeſetzt, daß die Luft ſich jedes Fig. Mahl im Stiefel gleichförmig ausbreite, keine neue von außen eindringe, und die noch eingeſchloſſene durch Wärme und Feuchtigkeit ſich nicht ändere.

Aufloͤſung.

Die anfängliche Dichtigkeit der Luft im Recipienten ſey $= \Delta$, die mit der atmoſphäriſchen zu dieſer Zeit einerley iſt; nach einer Anzahl von n Auspumpungen ſey die Dichtigkeit der Luft im Recipienten $= \delta$; der kubiſche Inhalt des Recipienten und der Verbindungsröhre bis zum Hahne ſey $= A$; der kubiſche Inhalt aber der übrigen Verbindungsröhre und des Stiefels bis zum höchſten Stande des Kolbens ſey $= a$; ſo iſt

$$\frac{\Delta}{\delta} = (1 + \frac{a}{A})^n .$$

Denn nach einer jeden Auspumpung breitet ſich die Luft aus dem Raume A in den Raum $A + a$ aus, und wird im Verhältniſſe dieſer Räume verdünnet: es verhält ſich nähmlich nach einer jeden Auspumpung die Dichtigkeit x der Luft nach der Auspumpung zu der Dichtigkeit D vor dieſer Auspumpung, wie der Raum A zum Raume $A + a$, das iſt

$$x : D = A : A + a; \text{ folglich } x = D . \frac{A}{A + a}.$$

Nun iſt die Dichtigkeit D vor der erſten Auspumpung $= \Delta$; folglich iſt ſolche nach der erſten oder zunächſt vor der zweyten Auspumpung $x = \Delta . \frac{A}{A + a}$.

Ferner ſetze man $D = \Delta . \frac{A}{A + a}$ in voriger Formel, ſo iſt die Dichtigkeit der Luft im Recipienten nach der 2ten Auspumpung $x = \Delta . (\frac{A}{A + a})^2$. Eben ſo iſt für $D = \Delta . (\frac{A}{A + a})^2$

die

Fig. die Dichtigkeit der Luft nach der 3ten Auspumpung $= \Delta . \left(\frac{A}{A+a}\right)^3$; und folglich nach der $n$ten Auspumpung $\delta = \Delta \cdot \left(\frac{A}{A+a}\right)^n$; das iſt $\frac{\Delta}{\delta} = \left(1 + \frac{a}{A}\right)^n$.

§. 76.

Aus der letzten Formel folget.

1) $\log \frac{\Delta}{\delta} = n . [\log (A + a) - \log A]$

2) $n = \frac{\log \Delta - \log \delta}{\log (A+a) - \log A}$

3) $\frac{a}{A} = -1 + \sqrt[n]{\frac{\Delta}{\delta}}$.

Durch 1) findet man den Grad der Verdünnung $\frac{\Delta}{\delta}$, wenn die Räume A, a (welche man mittelſt Anfüllung und Abwägung des Waſſers beſtimmen kann) und die Zahl n der Auspumpungen gegeben ſind. Durch 2) kann man die Zahl der Auspumpungen n aus dem Grade der Verdünnung $\frac{\Delta}{\delta}$, und aus den Räumen A, a; und endlich durch 3) das Verhältniß der Räume A, a aus n, und aus $\frac{\Delta}{\delta}$ finden.

Z. B. Die Luft ſoll 100mahl dünner werden, und der Raum A des Ricipienten iſt 4mahl größer als der Raum a des Stiefes; ſo iſt $\Delta = 100$, $\delta = 1$, $A = 4$, $a = 1$; folglich nach 2) $n = \frac{2}{0{,}09691} =$ 20 bis 21 Auspumpungen.

Mit

Mit einer wohl eingerichteten Luftpumpe kann man die Luft im Recipienten immer mehr und mehr verdünnen; man kann aber doch den Recipienten niemahls dadurch vollkommen luftleer machen, welches auch die Formel 2) für $\Delta = 1$, und $\delta = 0$ anzeiget. Das Guerikiſche Leere iſt niemahls ſo rein als das Torricelliſche bey einem gut ausgekochten Barometer. Fig.

§. 77.

Aufgabe.

Nach einer gegebenen Zahl der Compreſſionen zu finden, wie vielmahl die Luft im Recipienten verdichtet ſey; vorausgeſetzt, daß die Luft aus dem Stiefel jedesmahl ganz in den Recipienten getrieben wird, und daraus nichts davon entwiſchen kann.

Auflöſung.

Bedeuten A und a die Raumsinhalte des Recipienten und des Stiefels wie zuvor; Δ, δ aber die Dichtigkeiten der Luft im Recipienten im Anfange und nach n Compreſſionen, ſo iſt

$$\frac{\delta}{\Delta} = 1 + \frac{na}{A}.$$

Denn nach einer jeden Compreſſion wird die Luft aus dem Raume a zu der Luft im Raume A hinzugefüget, und darin im Verhältniſſe des Raumes A zu $A + a$ verdichtet. Nach n Compreſſionen wird daher zu der anfänglich in A befindlichen Luft A von der Dichtigkeit Δ aus dem Raume a die Luft a von eben derſelben Dichtigkeit $n$mahl hinzugefüget. Das iſt: die Menge der Luft im Recipienten vor der erſten Compreſſion verhält ſich zu der Menge in eben dieſem Recipienten nach n Compreſſionen wie A : $A + na$. Nun aber verhalten ſich die Dichtigkeiten Δ,

Fig. δ bey einerley Raumsinhalte des Recipienten, wie die angeführten Mengen der Luft. Folglich $\Delta : \delta = A : A + na$. Daraus folgt

$$1) \quad \frac{\delta}{\Delta} = 1 + \frac{na}{A}$$

$$2) \quad n = \frac{A}{a}\left(\frac{\delta}{\Delta} - 1\right)$$

$$3) \quad \frac{a}{A} = \frac{1}{n}\left(\frac{\delta}{\Delta} - 1\right)$$

Durch 1) findet man den Grad der Verdichtung für gegebene A, a, und n; durch 2) die Zahl der Compreſſionen für einen gegebenen Grad der Verdichtung; und endlich durch 3) aus $\frac{\delta}{\Delta}$ und aus n das Verhältniß der Räume a zu A.

§. 78.

Die angeführten Rechnungen (§. 75 und 77.) kann man nicht jederzeit mit völliger Sicherheit anwenden, weil die dabey angenommenen Vorausſetzungen nie völlig genau eintreffen, und weil die dazu nöthigen Abmeſſungen nicht jederzeit hinlänglich genau beſtimmet werden können. Deßwegen hat man eigene Inſtrumente erdacht, wodurch man den Grad der Verdünnung oder Verdichtung der Luft im Recipienten einer Luftpumpe beurtheilen kann.

Hierzu dienet 1) eine gläſerne Barometer-Röhre von gehöriger Länge. Sie geht mit ihrem oberen offenen Ende luftdicht durch den Teller der Luftpumpe unter die Glocke, mit dem unteren ebenfalls offenen Ende aber in ein Gefäß mit Queckſilber, oder iſt hier mit einer angeblaſenen Kugel umgebogen, und mit Queckſilber gefüllet. Dieſe Vorrichtung dienet die Verdünnung der Luft unter der Glocke anzuzeigen. Je mehr nähmlich die Luft unter der Glocke mittelſt der Luftpumpe verdünnet wird, je höher wird das Queckſilber aus dem unteren Gefäße in den Schenkel hin-

aufſteigen. Es wird aber doch nie die zur Zeit des gemachten Verſuches ſtatt findende Barometerhöhe völlig erreichen, weil man mittelſt der Luftpumpe kein genaues Luftleere zu wege bringen kann. Dieſer Elaſticitätszeiger ſcheint vor anderen deßhalb Vorzüge zu haben, weil dadurch gleich vom Anfange die Grade der Verdünnung der Luft beurtheilet werden können; und weil die Luft, die ſich etwa aus dem Queckſilber entwickelt, hierbei nicht nachtheilig wird. Wenn das obere Ende der Barometer-Röhre zur Seite gekrümmet, nicht in den Teller ſondern in die Verbindungsröhre tritt; ſo iſt es noch vortheilhafter, und auch da zu gebrauchen, wo in einem auf die Verbindungsröhre aufgeſchraubten Gefäße die Luft verdünnet werden ſoll. Fig.

2) Eine mit Queckſilber gefüllte Torricelliſche Röhre von 10 bis 12 Zoll, die man auf den Teller der Luftpumpe unter die Glocke ſtellen kann, dienet auch als Elaſticitätzeiger um den Grad der Verdünnung der Luft zu beurtheilen, wenn die Luft durch wiederhohlte Auspumpungen ſo weit verdünnet worden iſt, bis das Queckſilber in der Torricelliſchen Röhre zu ſinken anfängt. Dieſe iſt die gewöhnlichſte Barometerprobe der Luftpumpe. Nur hat ſie den Nachtheil, daß ſich nach wiederhohltem Gebrauche die Luft mit dem Queckſilber in etwas vermenget, und in den oberen Theil der Torricelliſchen Röhre dringet, wodurch die Probe unrichtig wird.

Etwas beſſer iſt 3) die heberförmige Barometerprobe, das iſt ein abgekürzter heberförmiger Barometer, welcher ausgekochtes Queckſilber enthält. Man beurtheilet hier ebenfalls die Elaſticität der Luft unter dem Recipienten aus der Höhe der Queckſilberſäule in dem geſchloſſenen Schenkel über dem Niveau des Queckſilbers in dem offenen Schenkel.

Das Werkzeug, um die wirkliche Verdünnung der Luft im Recipienten genau zu meſſen, iſt 4) die ſogenannte Birnprobe, ein gläſernes birnförmiges Gefäß, das unten offen iſt und ſich oben in eine genau cylindriſche Röhre endigt, deren Inhalt einen genau beſtimmten aliquoten Theil

des

Fig. des ganzen Inhalts des Gefäßes ausmacht, und in kleinere Abtheilungen getheilet iſt. Man hängt die leere Birnprobe an einen beweglichen Stift, der durch eine Lederbüchſe in dem Gewölbe des Recipienten geht, und dadurch auf- und abwärts beweget werden kann, unter dem Recipienten über einem Gefäße mit Queckſilber auf; pumpet die Luft ſo ſtark als möglich aus dem Recipienten aus; drückt dann die Birnprobe mit ihrer offenen Mündung in das Queckſilber tief hinab; und läßt endlich wieder die äußere Luft unter den Recipienten treten. Nun drückt dieſe das Queckſilber in den Raum der Birnprobe hinauf. Zugleich wird der Dunſt, der auf den Elaſticitätsmeſſer Einfluß hatte, hierbey durch dieſen Druck niedergeſchlagen, und es bleibt bloß die Luft übrig. Der Raum dieſer oben in der Röhre der Birnprobe übrig bleibenden Luft, verglichen mit dem Raume des ganzen Gefäßes, zeigt an, wie vielmahl die Luft unter dem Recipienten durch die vorgenommene Auspumpung wirklich dünner geworden ſey. Hierbey iſt wohl zu erinnern: 1) daß, wenn die Birnprobe den wirklichen Grad der Verdünnung der Luft anzeigen ſoll, es unumgänglich nothwendig iſt, daß das Queckſilber außerhalb der Birnprobe in dem Gefäße, worein man dieſe taucht, nicht niedriger ſtehe als inwendig, ſondern in gleichem Niveau ſey: ſonſt wird die Luft in der Birnprobe nicht eben dieſelbe Dichtigkeit haben wie die ſie umgebende; 2) daß ferner die zurückbleibende Luft in der Birnprobe einerley Temperatur habe mit der Luft vor der Verdünnung; und endlich 3), daß aus dem Queckſilber ſelbſt ſich keine Luft während des Anfüllens der Birnprobe entwickle. Um das letztere zu verhüten, muß man ſolches Queckſilber hierzu anwenden, das man kurz vorher ausgekocht hat.

§. 79.

Um die Verdichtung der Luft in einem Recipienten der Luftpumpe zu beurtheilen, kann ebenfalls eine umgebogene Barometerröhre von beträchtlicher Länge gebraucht werden, wovon der kürzere Schenkel mit dem Recipienten in Verbindung iſt, der andere offene Schenkel aber außerhalb

des

des Recipienten gerade in die Höhe gehet. Wird nun die Fig. Luft in dem Recipienten verdichtet, ſo wird das Queckſilber in dem Schenkel, welcher mit dem Recipienten verbunden iſt, ſtärker niedergedrückt als in dem anderen von dem bloßen Drucke der Atmoſphäre; die Oberfläche des Queckſilbers wird daher in dieſem 2ten Schenkel höher ſtehen als in dem erſten; und aus dieſem Ueberſchuße der Queckſilberſäule im zweyten Schenkel kann man die Verdichtung der Luft im Recipienten beurtheilen. Iſt der zweyte Schenkel mit dem erſten von einerley Länge, und Luftdicht zugeſchloſſen, so kann man aus dem verminderten Luftraume in demſelben die Verdichtung der Luft berechnen, wie im §. 67.

§. 80.

Mit einer wohl eingerichteten Luftpumpe kann man nun verſchiedene Verſuche anſtellen, welche theils die angeführten Sätze von der Elaſticität und von dem Drucke der Luft auf eine anſchauliche Art beſtätigen, theils noch verſchiedene andere Eigenſchaften der Luft erweiſen. Einige der merkwürdigſten Verſuche mit der Luftpumpe ſind folgende.

1) Das Queckſilber ſinkt im Barometer bey der Verdünnung der Luft, die auf das Queckſilber drücket; und ſteigt wieder auf die vorige Höhe durch Hinzulaſſung der atmoſphäriſchen Luft. Das Gegentheil erfolget bey der Verdichtung der Luft.

2) Bey der Verdünnung der Luft ſteigt das Queckſilber in einer Röhre, die oben offen und mit dem Raume des Recipienten in Verbindung ſteht, das untere ebenfalls offene Ende aber in ein Gefäß mit Queckſilber getaucht iſt. Bey Hinzulaſſung der atmoſphäriſchen Luft fällt das Queckſilber wieder ſoweit herab, daß es im Gefäße und in der Röhre einerley Höhe hat.

3) Eine ebene Glasplatte, als ein Theil des Umfanges des Recipienten angebracht, wird bey hinlänglicher Verdünnung der Luft von dem überwiegenden Drucke der Atmoſphäre zerſprenget. Daß die Glocke den Druck der At-

Fig. moſphäre bey einer noch ſo großen Verdünnung auszuhalten vermag, verurſachet die gewölbte Figur derſelben.

4) Eine ſchlaffe, feſt gebundene Blaſe mit etwas atmoſphäriſcher Luft in deren Falten, ſchwillt in verdünnter Luft ſtark auf; und fällt durch Hinzulaſſung der äußeren Luft wieder zuſammen.

5) Zwey hohle, gut an einander paſſende Halbkugeln oder Kugelabſchnitte, wenn zwiſchen ihnen die Luft verdünnet wird, hängen wegen des äußeren Druckes der Atmoſphäre gewaltig zuſammen. Die Guerickiſchen Halbkugeln von einer Magdeburgiſchen Elle im Durchmeſſer konnten bey ſtark verdünnter Luft auf jeder Seite mit 15 Pferden beſpannet nicht getrennet werden.

6) Eine brennende Kerze verliſcht in verdünnter Luft.

7) Thiere ſterben ſchnell in derſelben.

8) Bey der Verdünnung der Luft vermindert ſich der Schall eines darin befindlichen Schlagwerkes, und verſchwindet beynahe ganz.

9) Carteſianiſche Teufelchen, die ſonſt im Waſſer zu Boden ſinken, ſchwimmen bey verdünnter Luft.

10) Unter dem Recipienten ſiedet bey ſtarker Verdünnung der Luft nur mäßig erwärmtes Waſſer.

11) Bier, Milch, Sauerteig geben bey verdünnter Luft eine große Menge Luftblaſen von ſich.

12) Etwas weniges Waſſer wird unter dem Recipienten bey ſtark verdünnter Luft in elaſtiſchen vollkommen durchſichtigen Dampf aufgelöſet, der ſich bey Hinzulaſſung der atmoſphäriſchen Luft wieder als eine tropfbare Flüſſigkeit niederſchlägt; u. ſ. w.

§. 81.

Vorzüglich iſt die Luftpumpe geeignet um augenſcheinlich zu beweiſen, daß die Luft wirklich ſchwer iſt.

Denn wird in einer metallenen hohlen Kugel, die als ein Recipient mit einem Hahne verſehen an die Verbindungsröhre der Luftpumpe angeſchraubet iſt, die Luft möglichſt verdünnet; ſo findet man ſodann das Gewicht einer

ſolchen Kugel geringer als in dem vorigen Zuſtande, da ſie mit Luft angefüllet war. Im Gegentheile findet man das Gewicht einer ſolchen Kugel größer, wenn man die Luft darin verdichtet. Fig.

Der Unterſchied der Gewichte einer ſolchen Kugel, wenn ſie einmahl mit Luft erfüllet, und dann möglichſt luftleer gemacht wird, iſt das wirkliche Gewicht einer Menge Luft in dem Raume der hohlen Kugel. Dieſes mit dem Gewichte des Waſſers in eben demſelben Raume der hohlen Kugel verglichen, gibt das ſpecifiſche Gewicht der Luft, mit der man den Verſuch gemacht hat. Auf dieſe Art hat man gefunden, daß die atmoſphäriſche Luft nahe an der Meeresfläche und bey mittlerer Temperatur ungefähr 850 bis 900mahl leichter ſey als Regenwaſſer: oder daß 1 Wien. Kub. Fuß einer ſolchen atmoſphäriſchen Luft ſehr nahe 1 Unze Wien. Gew. wiege.

§. 82.

Hieraus ergibt ſich ferner der Unterſchied am Gewichte der Körper in freyer Luft und im luftleeren Raume. Das Gewicht eines Körpers (Druck gegen die Unterlage) im luftleeren Raume iſt nähmlich größer als in freyer Luft um das Gewicht dieſer Luft unter dem Umfange des Körpers; weil jeder Körper in der ſchweren und flüſſigen Luft eben ſo wie im Waſſer einen lothrechten Auftrieb (§ 21.) leidet, der dem Gewichte der verdrängten Luft gleich iſt.

§. 83.

Als man im vorigen Jahrhunderte die Entdeckung gemacht hatte, daß die uns allenthalben umgebende Luft eine ſchwere Flüſſigkeit iſt, und daß daher jeder darin befindliche Körper von ſeinem Gewichte ſo viel verlieret, oder einen ſo großen Auftrieb darin leidet, als die verdrängte Luft am Gewichte beträgt; ſo hat man ſogleich eingeſehen, daß eine hinlänglich große metallene hohle Kugel von möglichſt geringem Gewichte, wenn man ſolche möglichſt luftleer machete, in freyer Luft in die Höhe ſteigen müßte. Hierzu wäre erforderlich, daß das Gewicht des Metalles

Fig. der hohlen Kugel ſammt allem Zugehöre geringer wäre, als das Gewicht der verdrängten atmoſphäriſchen Luft. Allein wegen des äußeren Druckes der Atmoſphäre gegen den Umfang einer ſolchen luftleer zu machenden Kugel konnte man die Hülle der hohlen metallenen Kugel niemahls ſo dünn machen, daß ihr Gewicht kleiner geworden wäre, als das Gewicht der Luft unter eben demſelben Umfange; und daher blieb der Gedanke des Aufſteigens einer luftleer gemachten hohlen Kugel für die Ausübung immer unausführbar.

Endlich entdeckte man vor mehreren Jahren eine Luftgattung, die ſo genannte brennbare Luft, welche bey einer 10 bis 12mahl geringeren Dichtigkeit mit der atmoſphäriſchen Luft einerley Elaſticität hat. Man gewinnt dieſe brennbare Luft bey der Auflöſung der Eiſenſpäne in verdünnter Vitriolſäure. Seifenblaſen mit dieſer Luft angefüllet ſteigen in die Höhe. Und eben ſo ſteigt auch ein Luftballon aus überfirnißtem Taffet mit dieſer Luft angefüllet, in die Höhe, ſo lange das Gewicht des Luftballons ſammt der mit ihm verbundenen Laſt und ſammt der eingeſchloſſenen dünneren Luft geringer iſt, als das Gewicht der verdrängten atmoſphäriſchen Luft. Der Ueberſchuß des letzteren Gewichtes über das geſammte erſtere Gewicht iſt die bewegende Kraft, welche den Luftballon in die Höhe treibet.

Die brennbare Luft nennt man auch **Waſſerſtoff-Gaß**, weil ſolche bey der Zerſetzung des Waſſers als ein chymiſcher Beſtandtheil desſelben durch das dazu gehörige Verfahren gewonnen werden kann. Der andere Beſtandtheil des reinen Waſſers iſt die ſo genannte **Lebensluft**, oder das Sauerſtoff-Gas, wozu noch der **Wärmeſtoff** gehöret, um das Waſſer im flüſſigen Zuſtande zu erhalten. Die merkwürdigen Eigenſchaften verſchiedener erſt in neueren Zeiten bekannt gewordener Gaſe gehören nicht in gegenwätige Anfangsgründe. Man kann ſolche in neueren Lehrbüchern der Naturlehre und der Chymie nachſchlagen.

§. 84.

§. 84. Fig.

Vermöge des Auftriebes der ſchweren Luft gegen jeden darin befindlichen Körper muß auch das Gewicht eines Körpers nach Verſchiedenheit der Dichtigkeit der Luft verſchieden ſeyn. Hierauf gründet ſich der Gebrauch des Manometers (eines Inſtrumentes um die Veränderungen der Dichtigkeit der atmoſphäriſchen Luft bey verſchiedener Temperatur anzuzeigen.) Es beſteht ſolcher aus einer hohlen luftdicht verſchloſſenen Kugel (ſie kann von dünnem Glaſe ſeyn) etwa ein Fuß im Durchmeſſer, welche an einer empfindlichen Wage mittelſt eines Gegengewichtes von einer ſehr dichten Materie bey einer mittleren Temperatur der Luft ins Gleichgewicht gebracht iſt. Wie ſich nun in der Folge die Dichtigkeit der atmoſphäriſchen Luft verändert; ſo wird die hohle Kugel bey einer dichteren Luft einen größeren Auftrie leiden, als das Gegengewicht, und wird daher etwas in die Höhe ſteigen, das Gegengewicht aber um eben ſo viel herabſinken. Das Gegentheil wird bey einer dünner gewordenen Luft erfolgen.

In beyden Fällen kann die Zunge des Wagebalkens an einem eingetheilten Gradbogen die Veränderungen anzeigen. Die Dichtigkeit der Luft für den Zuſtand des Gleichgewichtes am Manometer muß man aus anderen Verſuchen für bekannt annehmen. Den kubiſchen Inhalt der hohlen Kugel und des Gegengewichtes kann man auch beſtimmen, und daraus das Gewicht den verdrängten Luft berechnen. Wenn man ſodann beobachtet, welche Zuſatz-Gewichte erforderlich ſind um den Zeiger des Manometers auf verſchiedene Eintheilungspuncte zu bringen; ſo wird man dadurch in den Stand geſetzet, aus den verſchiedenen Anzeigen des Manometers die jedesmahlige Dichtigkeit der Luft erſehen zu können.

Es ſey der kubiſche Inhalt der Kugel $= K$, und des Gegengewichtes im Stande des Gleichgewichtes $= k$; ſo iſt $K - k = a$ der Raumsinhalt der Luft, die auf den Manometer wirket. Das Gewicht der Luft in dem Raums-

Fig. inhalte a bey dem Zuſtande des Gleichgewichtes des Manometers ſey $= P$; ſo iſt $\frac{P}{a}$ das eigenthümliche Gewicht dieſer Luft (§. 34.). Für einen anderen Zuſtand der Luft ſey p das Gewicht, welches man bey vermehrter Dichtigkeit der Luft an der Seite der Kugel, bey verminderter aber dem Gegengewichte zulegen muß um das Gleichgewicht herzuſtellen; ſo wird nun das geänderte eigenthümliche Gewicht der Luft $= \frac{P \pm p}{a}$ ſeyn, nähmlich $+$ bey vermehrter, $-$ aber bey verminderter Dichtigkeit. Wenn z. B. die Luft dreymahl dünner würde, als ſie bey der Beſtimmung des P und Regulirung des Manometers war; ſo müßte um das Gleichgewicht zu erhalten auf der Seite des Gegengewichtes noch ein Gewicht $p = \frac{2}{3} P$ hinzugelegt werden. Und für $p = \frac{1}{2} P$ an der Seite des Gegengewichtes wäre die Luft nur halb ſo dicht, als ſie bey der Regulirung des Manometers war. Die Zuleg-Gewichte p haben zwar übrigens auch einen Raumsinhalt, welchen man aus der ſpecifiſchen Schwere ihrer Materie berechnen, und in Erwägung ziehen könnte; allein er kann als ſehr unbeträchtlich gegen a ohne merklichen Fehler vernachläſſiget werden.

§. 85.

Die angeführte Aenderung des Gewichtes eines und desſelben Körpers nach Verſchiedenheit der Dichtigkeit der Luft könnte einige Kaufleute, z. B. Juwelenhändler verleiten ihre Waren bey möglichſt dichter Luft einzukaufen, und bey möglichſt dünner nach Anzeige des Manometers zu verkaufen. Wenn die ſpecifiſche Schwere der Juwelen vielmahl geringer iſt, als die ſpecifiſche Schwere der zum Abwägen gebrauchten metallenen Gewichtstheile; ſo muß die Verſchiedenheit der Dichtigkeit der Luft immer eine Aenderung an dem Gewichte der Juwelen verurſachen. Wenn hingegen die ſpecifiſche Schwere der zum Abwägen erforderlichen Gewichtstheile mit der ſpecifiſchen Schwere des abzuwä-

wägenden Körpers beynahe einerley iſt; ſo kann die Aen- Fig.
derung des Gewichtes nach Verſchiedenheit der Dichtigkeit der Luft mittelſt der gewöhnlichen Wage nicht bemerket werden.

§. 86.

Nebſt den bereits erwähnten Werkzeugen, Barometer, Luftpumpe, Manometer, um verſchiedene Eigenſchaften der Luft zu beobachten, gibt es noch verſchiedene andere, als z. B. Thermometer, Pyrometer, Hygrometer, Anemometer, Gazometer, Eudiometer, u. ſ. w. deren lehrreiche Beſchreibung und Gebrauch in Gehlers phyſikal. Wörterbuche unter den genannten Artikeln zu finden iſt. Hier will ich bloß von den gewöhnlichſten Thermometern eine kurze Erwähnung machen.

Der Thermometer iſt ein Werkzeug, welches die Veränderungen der Wärme und Kälte der atmoſphäriſchen Luft, oder auch einer anderen Flüſſigkeit anzeiget. Es beſteht aus einer gläſernen Röhre, die ſich in eine Kugel, zuweilen auch in ein cylinderförmiges Gefäß endiget, und gemeiniglich mit Queckſilber, oder auch mit einer anderen Flüſſigkeit gehörig angefüllet wird. Durch die Wärme wird die eigeſchloſſene Flüſſigkeit etwas ausgedehnet, durch die Kälte aber zuſammengezogen, und zeiget daher durch Steigen und Fallen in der lothrechten Röhre die Veränderungen der Wärme und Kälte. Beym gehörig gefüllten Thermometer bemerket man den Stand des Queckſilbers im ſiedenden Waſſer, und dann im aufthauenden Eiſe oder Schnee. Der Raum zwiſchen dieſen zwey Puncten wird der Fundamental-Abſtand genannt. Dieſer

1) in 80 gleiche Theile getheilet gibt den Reaumürſchen Queckſilber-Thermometer, wo die Grade vom Frierpuncte o ſowohl auf- als abwärts gezählet werden; aufwärts bis zum Siedpuncte 80, und abwärts bis zur Kugel etwa 30 oder höchſtens 40.

2) In 180 gleiche Theile getheilet, und 32 ſolcher Theile unter den Frierpunct getragen um den o Punct als den Punct einer künſtlichen Kälte aus einer Miſchung von

Fig. Schnee und Salmiak zu erhalten, wo ſodann der Siedpunct mit 212 bezeichnet wird, gibt den Fahrenheitiſchen Thermometer.

3) In 150 Theile, den Delisliſchen Thermometer, welcher die Grade vom Siedpuncte o herabwärts bis zum Frierpuncte, und noch weiter unter dieſen etwa 200 nahe an der Kugel in einem fortzählet.

4) In 100 Theile getheilet, gibt endlich den ſchwediſchen und neufränkiſchen Thermometer (Thermométre Centigrade) welcher die Grade vom Frierpuncte o auf- und abwärts zählet; aufwärts bis zum Siedpuncte 100, und abwärts bis zur Kugel etwa 40, höchſtens 50.

26 Wenn man einem Thermometer die Geſtalt gibt, wie es die Figur 26 anzeiget, bey welchem die Kugel, und der Theil der Röhre von A bis B mit Weingeiſte, der Theil BCD aber mit Queckſilber angefüllet iſt; und man legt in die Höhlung der gläſernen Röhre bey B und bey D Cylinderchen von etwas kleinerem Durchmeſſer etwa Stückchen von Eiſendrath: ſo wird ein ſolcher Thermometer die Eigenſchaft haben, daß er jederzeit ſeit der letzten Beobachtung, bis man ihn wieder anſieht, ein Merkmahl ſowohl des höchſten als auch des niedrigſten Grades der inzwiſchen geweſenen Temperatur zurück läßt, und zugleich wie jeder andere Weingeiſt-Thermometer den gegenwärtigen Grad der Temperatur anzeiget. Wenn man nähmlich nach einer gemachten Beobachtung einen ſolchen Thermometer nach der Seite C ſo drehet, daß die zwey in der Röhre eingeſchloſſenen Cylinderchen beyde an die Oberflächen des Queckſilbers herabfallen, ſodann aber den Thermometer wieder in die anfängliche horizontale Lage ſtellet; ſo wird bey vermehrter Wärme das Cylinderchen bey D von dem Queckſilber ſo lange gegen E fortgeſchoben als die Wärme zunimmt. Wenn hingegen die Wärme abnimmt, ſo wird das Cylinderchen bey B gegen A fortgeſchoben. Jedes bleibt dort ſtehen, wo die Oberfläche des Queckſilbers den höchſten oder niedrigſten Stand der

Tem-

Temperatur erreichet hat. Weil übrigens der Weingeiſt-Thermometer die Veränderungen der Temperatur nicht ſo regelmäßig anzeiget, als der Queckſilber-Thermometer; ſo kann man den bemerkten höchſten und niedrigſten Stand des erwähnten zuſammengeſetzten Thermometers bey jeder Beobachtung mittelſt eines anderen gewöhnlichen Queckſilberthermometers berichtigen; deſſen Vergleichung mit jenem für mehrere gleichnahmige Grade durch vorhergehende Unterſuchungen ausgemittelt ſeyn muß. Fig.

Drit-

Drittes Hauptſtück.

Grundlehre der Hydraulik.

I. Abſchnitt.

Ausfluß des Waſſers durch Oeffnungen im Boden oder in der Wand eines Gefäßes.

§. 87.

Fig. Hydraulik heißt die Lehre von der Bewegung flüſſiger Maſſen. Von dieſer weitläufigen noch nicht ganz ins reine gebrachten Wiſſenſchaft ſollen hier nur einige der nothwendigſten Grundlehren angeführet werden, um einige täglich in die Augen fallende mechaniſche Wirkungen des Waſſers erklären, und insbeſondere die Bewegung der feſten Körper in einem flüſſigen Mittel mit der nöthigen Deutlichkeit abhandeln zu können. Wer die Hydraulik in ihrem ganzen Umfange kennen muß, der ſtudiere die claſſiſchen Bücher eines Hrn. Käſtners, Karſtens, Belidors über dieſen Gegenſtand, wie auch K. Chr. Langsdorf Lehrbuch der Hydraulik 2 Bände in 4. Altenburg 1794 und 1796. Als ein Handbuch wird insbeſondere Herrn Rosmanns Lehrbuch der Hydraulik Berlin bey Lange 1797 wegen ſeines practiſchen Nutzen empfohlen.

Fig.

§. 88.

1) Unter **Boden** verſteht man eine wagrechte oder horizontale, unter **Wand** aber jede nicht wagrechte ebene oder krumme Fläche im Umfange eines mit Waſſer oder mit einer anderen ſchweren Flüſſigkeit angefüllten Behälters oder Gefäßes.

2) Wenn ſich im Boden eines Waſſerbehälters eine Oeffnung befindet, ſo nennt man die lothrechte Entfernung der Oeffnung vom Waſſerſpiegel die **Druckhöhe**. Iſt die Oeffnung in irgend einer Wand, und die Entfernung des Schwerpunctes einer ſolchen Oeffnung vom Waſſerſpiegel beträchtlich größer als die Höhe der Oeffnung; ſo nennt man dieſe Entfernung des Schwerpunctes von dem Waſſerſpiegel auch noch die Druckhöhe einer ſolchen Oeffnung. Sie iſt gleichſam die **mittlere Druckhöhe**, weil die Waſſertheilchen ober dem Schwerpuncte eine kleinere, die unter demſelben hingegen eine größere Druckhöhe haben. Der **Waſſerſtand** aber heißt die Entfernung des unterſten Randes einer ſolchen Wandöffnung von dem Waſſerſpiegel.

3) Die **Geſchwindigkeit** des **Waſſers** heißt der in einer Zeit-Einheit, gewöhnlich in 1 Secunde gleichförmig durchlaufbare Weg desſelben. **Geſchwindigkeitshöhe** heißt hier eben ſo wie in der Mechanik der feſten Körper (3. Th. §. 47.) diejenige Höhe, von welcher ein ſchwerer Körper frey herabfallen müßte, um dadurch eine der gegebenen gleiche Geſchwindigkeit zu erhalten. Aus der gegebenen Geſchwindigkeits-Höhe $= a$ läßt ſich die dazu gehörige Geſchwindigkeit $= c$ ſehr leicht berechnen; und umgekehrt. Es iſt nähmlich für die bekannte Beſchleunigung der Schwere $= g = 15\frac{1}{2}$ W. Fuß (vermöge 3. Th. §. 47.) $c = \sqrt{4ga}$, und $a = \frac{c^2}{4g}$.

4) Die **Waſſermenge** heißt der kubiſche Inhalt des in einer Zeit-Einheit, gewöhnlich in 1 Secunde durch eine Oeffnung, oder durch ſonſt einen Querſchnitt abfließenden Waſſers. Die Waſſermenge wird gemeiniglich in Kubikfü-

Fig. füßen oder Kubikzollen, zuweilen auch im Gewichte, oder in einem anderen bekannten Maße angegeben, wodurch ſich der kubiſche Inhalt beſtimmen läßt. Wenn nun bey einer gleichförmigen Bewegung eines aus irgend einer Oeffnung ausfließenden Waſſerſtrahls die Geſchwindigkeit des Waſſers oder die Länge des in einer Secunde zurückgelegten Weges $= c$, und der Querſchnitt des Waſſerſtrahls $= f$ iſt; ſo iſt die Waſſermenge $= fc$; nähmlich es fließet durch die Oeffnung in einer Secunde ein Waſſer-Prisma hindurch, welches f zur Grundfläche, und c zur Höhe hat. Eben ſo iſt bey einem in ſeinem Bette durch einen Querſchnitt $= f$ mit der Geſchwindigkeit $= c$ gleichförmig fortſtrömenden Fluße die Waſſermenge $m = fc$.

A. Geſchwindigkeit des ausfließenden Waſſers.

§. 39.

Die Geſchwindigkeit, mit der das Waſſer aus einer kleinen Oeffnung eines Gefäßes ausfließet, hat die Druckhöhe der Oeffnung zu ihrer Geſchwindigkeitshöhe. Iſt nähmlich einer kleinen Oeffnung Druckhöhe $= a$, die bekannte Beſchleunigung der Schwere $= g = 15\frac{1}{8}$ Wien. Fuß, und die Geſchwindigkeit des ausfließenden Waſſers an der Oeffnungsfläche $= c$; ſo iſt

$$c = \sqrt{4ga} = 2g^{\frac{1}{2}} \sqrt{a}.$$

1) Um dieſe Grundwahrheit der Hydraulik einzuſehen
27 ſey ABCD Fig. 27 ein Gefäß mit ſchwerem Waſſer bis EF angefüllet; im Boden ſey eine Oeffnung mn angebracht, deren Flächeninhalt gegen die übrigen Querſchnitte des Gefäßes ſo klein ſey, daß das Waſſer während des Ausflußes durch die Oeffnung mn im Gefäße ſelbſt ohne merklichen Fehler als ruhend angeſehen werden könne, ſo daß in einer kurzen Zeit von ein Paar Secunden das Waſſer in jedem Querſchnitte des Gefäßes ober der Oeffnung ſeinen Ort nicht merklich ändere, und die Druckhöhe beynahe ungeändert verbleibe. Bey ſolchen Umſtänden wird jede durch die

die Oeffnung mn ausſtrömende Waſſerſchichte mnqp, die Fig.
man als ein Waſſer-Prisma von der Grundfläche mn = pq = f, 27
und von einer unendlich kleinen Dicke mp = e betrachtet, einen auf die Oeffnung ſenkrechten Druck leiden der dem Gewichte einer Waſſerſäule von der Grundfläche mn = f und von der Höhe mr = a gleich iſt (§. 15.), wo a die Druckhöhe der Oeffnung iſt. Die zu bewegende Maſſe iſt daher in dieſem Falle das Gewicht der erwähnte Waſſerſchichte = fe; und die bewegende Kraft iſt das Gewicht der erwähnten Waſſerſäule = fa für das eigenthümliche Gewicht des Waſſers = 1. Dieſe bewegende Kraft iſt unveränderlich wegen der gemachten Vorausſetzung des im Gefäße in Ruhe verbleibenden Waſſers, während etwas davon durch die kleine Oeffnung ausſtrömet. Folglich kann die Geſchwindigkeit = c, welche das Waſſer bey ſeinem Ausſtrömen durch die Oeffnung mn erlanget, da die Fläche mn der Waſſerſchichte mnqp von mn bis pq gelanget, und den unendlich kleinen Weg mp = nq = e zurückleget, durch die allgemeine Formel $c = \sqrt{\frac{4gPs}{M}}$ (3. Th. §. 50.) beſtimmet werden, wenn man darin $P = fa$, $M = fe$, und $s = e$ ſetzet; es iſt nähmlich dieſe Geſchwindigkeit $c = \sqrt{\frac{4g.fa.e}{fe}} = \sqrt{4ga}$; und iſt daher gleich der Geſchwindigkeit, welche ein frey fallender Körper durch die Druckhöhe a erlanget; das iſt, ſie hat die Druckhöhe a zu ihrer Geſchwindigkeitshöhe. Man muß allhier die Dicke der Schichte mp und auch den zurück gelegten Weg mp = s unendlich klein annehmen, eigentlich nur ſo klein, daß die bewegende Kraft während der Zurücklegung des Weges e für unveränderlich angeſehen werden könne, und damit die am Ende dieſes Weges e erlangte Geſchwindigkeit der Waſſerſchichte durch die Schwerkraft nicht merklich geändert werde. Mit der gefundenen Geſchwindigkeit ſchießt jede Waſſerſchichte aus der Oeffnung gleichſam plötzlich heraus; und befol-

get

Fig. get ſodann weiters die Geſetze der Bewegung eines mit einer gegebenen Geſchwindigkeit abwärts geworfenen Körpers. Bey den meiſten in der Natur vorkommenden Bewegungen wird zur Hervorbringung einer gegebenen Geſchwindigkeit eine gewiſſe beſtimmte Zeit erfordert, wie z. B. beym freyen Falle der ſchweren Körper. Allhier hingegen iſt die Geſchwindigkeit des ausſtrömenden Waſſers plötzlich da, weil die bewegende Kraft in Vergleichung gegen die bewegte Maſſe unendlich groß iſt.

2) Wenn die kleine Oeffnung nicht im Boden, ſondern irgendwo in einer lothrechten Seitenwand angebracht iſt; ſo bleiben die Gründe zur Beſtimmung der Geſchwindigkeit eben dieſelbe wie in 1); daher iſt für die Druckhöhe a auch hier die Geſchwindigkeit $c = \sqrt{4ga}$; die Richtung der Geſchwindigkeit aber iſt in dieſem Falle horizontal; und der ausſtrömende Waſſerſtrahl bildet mit Beſeitigung aller ſonſtigen Hinderniſſe eine Parabel, die ſich leicht beſtimmen läßt.

28 Wenn nähmlich in Fig. 28 die Druckhöhe MR $= a$, die Erhöhung des Mittelpunctes der Oeffnung M über die Horizontal-Linie PQ, als die Abſciſſe MP $= x$, und die Ordinate PQ $= y$ geſetzet wird; ſo iſt für die Dauerzeit $= t$ der Bewegung von M bis Q in der krummen Linie MQ die Ordinate PQ $=$ MS $= y = ct$ wegen der gleichförmigen Bewegung nach der Richtung MS; und die Abſciſſe MP $= x = gt^2$ wegen der gleichförmig beſchleunigten Bewegung nach dieſer Richtung. Daraus folgt (nach Hinwegſchaffung von t aus $y = ct$, und aus $x = gt^2$) die Gleichung für die Parabel $y^2 = \frac{c^2}{g}.\,x$; und die Gleichung für die Geſchwindigkeit $c = \frac{y\sqrt{g}}{\sqrt{x}}$, welche gebraucht werden kann, um bey einem gemachten Verſuche aus den bekannt gewordenen x und y die Geſchindigkeit zu beſtimmen.

Da ferner allhier auch $c = \sqrt{4ga}$ iſt; ſo iſt auch $\sqrt{4ga}$

$=$

$= \frac{y\sqrt{g}}{\sqrt{x}}$, und $y^2 = 4a.x$ ebenfalls eine Gleichung für die Parabel MQ, deren Parameter = 4 MR, und R der Punct iſt, durch welchen die Leitlinie (Directrix) durchgehet. Fig. 28

Aus den angeführten Formeln

$$c = \sqrt{4ga},\ c = \frac{y\sqrt{g}}{\sqrt{x}},\ y = \sqrt{4ax}$$

wird ein aufmerkſamer Leſer verſchiedene nützliche Folgerungen ſelbſt ableiten können. Z. B.

a) Bey verſchiedenen Druckhöhen ſind die Geſchwindigkeiten des aus kleinen Oeffnungen ausfließenden Waſſers den Quadratwurzeln dieſer Druckhöhen proportional in Fig. 27, und in 28.

b) Für einerley Erhöhung MP in Fig. 28 verhalten ſich die Geſchwindigkeiten c wie die Ordinaten oder Springweiten PQ, und dieſe wie die Quadratwurzeln der Druckhöhen.

c) Damit bey einer gegebenen Erhöhung PR $= b$ des Waſſerſpiegels über die Horizontal-Ebene PQ der ausſtrömende Waſſerſtrahl MQ die größte Weite PQ erreiche; muß die Erhöhung der Oeffnung MP $= \frac{1}{2}$PR, nähmlich $x = \frac{1}{2}b$, wie auch die Druckhöhe MR $= \frac{1}{2}b$ ſeyn: und die größte Weite des Strahles iſt ſodann $y = b$, nähmlich PQ = PR. Denn in der Gleichung $y^2 = 4(b - x)x$, welche aus der oben angeführten $y^2 = 4ax$ für $a = b - x$ folget, erhält man durch die Differenzirung $ydy = (2b - 4x)\,dx$; und dieſes Differenziale = o geſetzt gibt $x = \frac{1}{2}b$; wofür nun $y = b$ wird.

d) Die Springweiten der Strahlen aus kleinen Oeffnungen in gleichen Entfernungen ober und unter der Mitte der Vertical-Linie PR ſind einander gleich. Denn aus der Gleichung $y = \sqrt{[4(b - x)x]}$ erhält man ſowohl für $x = \frac{1}{2}b + z$, als auch für $x = \frac{1}{2}b - z$ einerley Werth $y = \sqrt{(b^2 - 4z^2)}$.

Fig. 29 3) Iſt die Achſe der Oeffnungsfläche wie Fig. 29 gerade in die Höhe gerichtet, ſo bleiben auch hier die Gründe zur Beſtimmung der Geſchwindigkeit eben dieſelben wie in 1); es iſt alſo auch hier die Geſchwindigkeit $c = \sqrt{4ga}$ bey der Druckhöhe MN $= a$; nur ihre Richtung geht in dieſem Falle lothrecht aufwärts, weil der hydroſtatiſche Druck als die bewegende Kraft nach der auf die Oeffnungsfläche ſenkrechten Richtung hier lothrecht aufwärts preſſet. Die ausſtrömende Waſſerſchichte befolget in dieſem Falle die Geſetze der Bewegung eines mit der Geſchwindigkeit $\sqrt{4ga}$ gerade aufwärts geworfenen ſchweren Körpers (nach 3. Th. §. 46.) das iſt, jede mit der Geſchwindigkeit $\sqrt{4ga}$ aus der kleinen Oeffnung hinausſchießende Waſſerſchichte ſteiget mit abnehmender Geſchwindigkeit bis zur Höhe MN $= a$ des Waſſerſpiegels ABN, wo ihre Geſchwindigkeit verſchwindet und die Waſſertheilchen ſodann herabfallen müſſen. Da die Waſſerſchichten aus der Oeffnung mit einer der Druckhöhe zugehörigen Geſchwindigkeit ununterbrochen aufeinander folgen; ſo bilden ſie einen in die Höhe ſpringenden Waſſerſtrahl, wie man es bey den allgemein bekannten Springbrunnen ſehen kann.

§. 90.

Die Erfahrung zeiget, daß die Höhe des Waſſerſtrahles bey den Springbrunnen gemeiniglich etwas kleiner iſt, als die Druckhöhe, beſonders wenn letztere ſehr groß iſt. Man kann hiervon mehrere Urſachen angeben z. B.

1) Weil die innere Fläche der Oeffnung nicht vollkommen glatt iſt, und das ausſtrömende Waſſer daher an dieſer Stelle durch eine Art von Reibung in etwas gehindert wird.

2) Weil das Waſſer nicht vollkommen flüſſig iſt, ſondern deſſen Theilchen einen obſchon geringen Zuſammenhang mit einander haben, auf deſſen Trennung auch eine Kraft verwendet werden muß.

3) Weil das Waſſer zu oberſt am Strahle, welches nach völlig verlorner Geſchwindigkeit vertical herabfallen ſoll, von dem nachfolgenden getragen oder auf die Seite

ge-

getrieben werden muß. Daher auch der Waſſerſtrahl des Fig.
Springbrunnens gleich etwas höher ſteiget, wenn die Spring- 29
öffnung ein wenig ſchief ſeitwärts gewendet wird.

4) Weil die Luft dem emporſpringenden Waſſerſtrahle einen deſto größeren Widerſtand leiſtet, je größer die Druckhöhe iſt.

5) Weil bey großen Springbrunnen die Leitröhre EF, welche das Waſſer vom Behälter ACDB zur Springöffnung M leitet, in ihrem ſenkrechten Querſchnitte gemeiniglich zu klein iſt. Eine ſolche Leitröhre ſollte in ihrem Querſchnitte überall ſo weit ſeyn, daß das Waſſer darin, während es aus der kleinen Springöffnung empor ſpringet, beynahe als ruhend angeſehen werden könnte, weil nur unter dieſer Vorausſetzung die Geſchwindigkeitshöhe des aus der Oeffnung ausfließenden Waſſers der Druckhöhe gleich iſt.

§. 91.

Wie nun bey der Anlage eines Springbrunnens für eine gegebene Druckhöhe die Größe ſowohl der Springöffnung, als auch die Weite der Leitröhre anzugeben ſey, damit der Waſſerſtrahl die größte Höhe erreiche, läßt ſich mit einiger Zuverläſſigkeit nicht anders, als durch Vergleichung mehrerer Beobachtungen beſtimmen. Dieſe hier anzuführen iſt nicht meine Abſicht. Man findet ſolche in den oben genannten hydrauliſchen Büchern. Nur ſo viel will ich bemerken, daß es bey Springbrunnen vortheilhaft iſt die Ausflußöffnung in einer dünnen Metallplatte im Deckel eines hinlänglich weiten Springrohres anzubringen, und nicht wie es gemeiniglich geſchieht, die Leitröhre in eine cylindriſche oder koniſche Springröhre auslaufen zu laſſen. Bey dergleichen am vortheilhafteſten eingerichteten Springbrunnen hat man beobachtet, daß bis zu einer Druckhöhe von 5 bis 6 Fuß der Waſſerſtrahl ziemlich genau bis zur Höhe des oberſten Waſſerſpiegels ſich erhebe, und daher die dem ausfließenden Waſſerſtrahle an der Springöffnung zugehörige Geſchwindigkeitshöhe der Druckhöhe gleich ſey. Wenn hingegen die Druckhöhe be-

trächt-

Fig. trächtlich größer iſt als 5 Fuß; ſo iſt (vorzüglich wegen §. 90. n. 3. und 4.) der Waſſerſtrahl niedriger als die Druckhöhe.

Fernere Bemerkungen über Springbrunnen.

1) Aus mehreren angeſtellten Beobachtungen hat man die Regel abgeleitet: Bey Springbrunnen von verſchiedenen Druckhöhen verhalten ſich die Höhenunterſchiede der Waſſerſtrahlen von den dazu gehörigen Druckhöhen, wie die Quadratzahlen dieſer Waſſerſtrahlen: und eine Druckhöhe von 61 Zoll gibt einen Waſſerſtrahl von 60 Zoll im Pariſer-Maß. Daraus findet man für jede andere Druckhöhe $= A$ und für den dazu gehörigen Waſſerſtrahl $= a$ eines gut eingerichteten Springbrunnens aus der Proportion

$$60^2 : a^2 = 1 \text{ Zoll} : A - a \text{ Zoll},$$

die Gleichung

$$a^2 + 3600\,a = 3600\,A,$$

wodurch man a aus A, oder auch umgekehrt A aus a in Pariſer-Zollen berechnen kann;

es iſt nähmlich $a = -1800 + 60\sqrt{(A + 900)}$
und $A = a + \frac{a^2}{3600}$ } Par. Zoll.

Z. B. Ein Springbrunnen von 30 Pariſ. Fuß Druckhöhe $= 360$ Zoll $= A$ gibt bey der beſten Einrichtung einen Waſſerſtrahl a nur von 329 Zoll = 27 Fuß 5 Zoll.

Sind aber die Druckhöhe $= A$, und der dazu gehörige Waſſerſtrahl $= a$ eines Springbrunnens im Pariſ. Fuß ausgedruckt; ſo haben die angeführten zwey Gleichungen folgende Geſtalt:

$$a = -150 + 10\sqrt{(3A + 225)}$$
$$A = a + \frac{a^2}{300} \ldots\ldots$$
} Pariſ. Fuß.

2) Auch hat man aus Vergleichung mehrerer Beobach- Fig.
tungen gefunden, daß bey hinlänglich weiten Leitröhren der Springbrunnen die zur größten Strahlhöhe gehörigen Springöffnungen ſich verhalten wie die Quadratwurzeln der Druckhöhen; und daß bey der Druckhöhe von 51,75 Par. Fuß der zur größten Strahlhöhe erforderliche Durchmeſſer der Spring-Oeffnung in einer dünnen Metallplatte = 7,245 Par. Lin. ſeyn müſſe.

Für die Druckhöhe = A Par. Fuß findet man daher den Durchmeſſer = δ der Springöffnung in Par. Lin. durch folgende Formel:

$$\delta = 2{,}701 \sqrt[4]{A},$$

welche aus der Proportion $\delta^2 : 7{,}245^2 = \sqrt{A} : \sqrt{51{,}75}$ abgeleitet iſt.

§. 92.

Wenn bey dem Ausſtrömen des Waſſers aus kleinen Oeffnungen der Waſſerſpiegel im Behälter mittelſt eines genau paſſenden Stämpels von einer darauf wirkenden Kraft gepreſſet wird; ſo iſt ſodann die Geſchwindigkeit des ausfließenden Waſſers größer, als die der Waſſerhöhe zugehörige; weil bey dieſem Umſtande die Waſſerſchichte in dem Querſchnitte der Oeffnung nebſt dem hydroſtatiſchen Drucke des darüber ſtehenden ſchweren Waſſers auch noch den fortgepflanzten Druck der auf den Waſſerſpiegel mittelſt des Stämpels wirkenden Kraft zu leiden hat. Um in einem ſolchen Falle die Geſchwindigkeit des ausfließenden Waſſers zu finden, muß man die Kraft, womit der Waſſerſpiegel wirklich gepreſſet wird, in eine Waſſerſäule verwandeln, welche den gepreßten Waſſerſpiegel zur Grundfläche, und eine ſolche Höhe hat, daß das Gewicht dieſer Waſſerſäule ſoviel betrage, als die erwähnte auf den Waſſerſpiegel wirkende Kraft. Dieſe ſo gefundene Druckhöhe der auf den Waſſerſpiegel wirkenden Kraft muß man nun zur Waſſerhöhe oder zur natürlichen Druckhöhe addiren, um die geſuchte Geſchwindigkeitshöhe des ausfließenden Waſſers

in

Fig. in einem ſolchen Falle zu erhalten. Daraus wird ſodann die Geſchwindigkeit ſelbſt wie gewöhnlich berechnet. Um ſich von dieſer Behauptung zu überzeugen, darf man nur hier eben ſo wie im §. 89 die ganze bewegende Kraft nach der erwähnten Vorſtellung gehörig ausdrucken; ſo wird man die geſuchte Geſchwindigkeit der angeführten Behauptung gemäß erhalten.

§. 93.

Bey der bisherigen Betrachtung über die Geſchwindigkeit des ausfließenden Waſſers unter verſchiedenen Druckhöhen iſt vorausgeſetzet worden: jeder Querſchnitt des Gefäßes ſey in Vergleichung der Ausfluß-Oeffnung ſo groß, daß das Waſſer aller Orten im Gefäße beynahe als ruhend angeſehen werden könne; und daß daher auch der Waſſerſpiegel durch eine kurze Zeit der Bewegung nicht merklich ſinke. Wenn inzwiſchen der Ausfluß durch längere Zeit dauert; ſo wird das Waſſer im Gefäße allmählich niedriger und die Druckhöhe kleiner werden. Die Geſchwindigkeit wird daher im Verhältniſſe der Quadratwurzeln aus den Druckhöhen abnehmen; es wird nähmlich bey der Druckhöhe $= A$ die Geſchwindigkeit $C = \sqrt{4gA}$, und bey der kleiner gewordenen Druckhöhe $= a$ die Geſchwindigkeit $c = \sqrt{4ga}$ ſeyn; wo $C : c = \sqrt{A} : \sqrt{a}$ ſich verhält.

Soll nun die Geſchwindigkeit des ausfließenden Waſſers, und die dazu gehörige Druckhöhe durch eine geraume Zeit ungeändert beybehalten werden; ſo iſt es nothwendig, daß die ausfließende Waſſermenge durch einen gehörig angebrachten Seitenzufluß erſetzet werde. Im Folgenden ſollen auch die nöthigſten Sätze beygebracht werden, wodurch man die ausflüßende Waſſermenge aus verſchiedenen Oeffnungen bey verſchiedenen Druckhöhen unter der bisherigen Vorausſetzung, daß die Ausflus-Oeffnung in Vergleichung gegen jeden anderen Querſchnitt des Gefäßes ſehr klein ſey, berechnen kann. Wenn hingegen die Ausfluß-Oeffnung in Vergleichung der Querſchnitte des Gefäßes nicht ſonderlich klein iſt, ſondern zu dieſen in einem gegebenen Verhält-

niſſe

niſſe ſteht; ſo hat man bis jetzt noch keine für die Ausübung brauchbare Regel zur Berechnung der Geſchwindigkeit, und der in einer gegebenen Zeit ausfließenden Waſſermenge ausfindig machen können, ungeachtet mehrere der ſcharfſinnigſten Männer an der Auflöſung dieſer Aufgabe ihre Kräften verſuchten. Fig.

§. 94.

Die in den Schriften eines Bernoulli, Käſtner, Karſten, u. ſ. w. vorkommende Formel, daß in einem prismatiſchen Gefäße bey einer unveränderlich erhaltenen Druckhöhe $= a$ für den horizontalen Querſchnitt des Gefäßes $= F$, und für die Oeffnungsfläche im Boden $= f$ die Geſchwindigkeitshöhe des ausfließenden Waſſers $\frac{c^2}{4g} = a\left(\frac{F^2}{F^2 - f^2}\right)$ ſey, iſt in der Ausübung für den am gewöhnlichſten vorkommenden Fall, wo die aus der Oeffnung ausfließende Waſſermenge durch einen Seitenzufluß erſetzet wird, gänzlich unbrauchbar und unrichtig. Nach dieſer Formel wäre die Geſchwindigkeit des ausfließenden Waſſers jederzeit größer, als die der Druckhöhe zugehörige, und müßte mit der Erweiterung der Ausfluß-Oeffnung bey einerley Druckhöhe ins Unendliche fortwachſen. Der Strahl eines Springbrunnens bey einerley Druckhöhe müßte daher nach dieſer Regel deſto höher ſteigen, je größer die Ausfluß-Oeffnung gemacht würde, welches der Erfahrung gänzlich zuwider iſt.

Nach der vom Herrn Baader in ſeiner vollſtändigen Theorie der Saug- und Hebepumpen, Beyreuth 1797 angegebenen Formel für eben denſelben Fall

$$\frac{c^2}{4g} = \frac{a}{1 + \frac{f^2}{F^2} - \frac{f^3}{F^3}}$$

iſt im Gegentheile die Geſchwindigkeit des ausfließenden Waſſers etwas kleiner als die der Druckhöhe zugehörige; und dieſer Umſtand iſt allerdings

Fig. der Erfahrung gemäß. Allein nach dieſer Formel könnte die Geſchwindigkeit des ausfließenden Waſſers mit der Erweiterung der Oeffnung nur bis $f = \frac{2}{3}F$ abnehmen; wo für $f = \frac{2}{3}F$ bey unverändert erhaltener Druckhöhe a die Geſchwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{4g} = \frac{27}{31}\,a$ wäre, und den kleinſten Werth hätte. Bey einer ferneren Erweiterung der Ausfluß-Oeffnung aber müßte die Geſchwindigkeit des ausfließenden Waſſers wieder wachſen, und es wäre für $f = F$ die Geſchwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{4g} = a$. Dieſes letztere Wachſen der Geſchwindigkeit mit der ferneren Erweiterung der Ausfluß-Oeffnung von $f = \frac{2}{3}F$ an, dürfte der Erfahrung nicht gemäß ſeyn. Auch iſt für $f = F$ nach dieſer Baaderiſchen Grundformel der Hydraulik die Geſchwindigkeit $c = \sqrt{4ga}$ unrichtig, da ſie für dieſen Fall $= 0$ ſeyn muß. Denn wenn bey einem cylindriſchen oder prismatiſchen mit ſchwerem Waſſer bis zur Höhe a angefülltem Gefäße der Boden plötzlich weggenommen würde; ſo müßte die Waſſermaſſe eben ſo wie ein feſter Körper unter eben demſelben Umfange herabfallen; die anfängliche Geſchwindigkeit, welche eigentlich geſucht wird, wäre alſo hier $= 0$, und nicht $= \sqrt{4ag}$; dieſe letztere wird erſt nach der Zurücklegung des Weges a oder nach Verlauf der Zeit $\sqrt{\frac{a}{g}}$ durch den freyen Fall erlanget, nicht aber in dem erſten Augenblicke der Bewegung nach plötzlicher Hinwegnehmung des Bodens, wie es Hr. Baader im angeführten Werke §. 2, und §. 11. Anmerk. behaupten will.

Da die Bernoulliſche Grundformel der Hydraulik $\frac{c^2}{4g} = a\left(\frac{F^2}{F^2 - f^2}\right)$ das Verkehrte der Erfahrung angibt, ſo käme man der Wahrheit vielleicht näher, wenn man in der angeführten Formel den Bruch $\frac{F^2}{F^2 - f^2}$ umkehr-

te,

te, und daher die Geſchwindigkeitshöhe des aus einer gegebenen Oeffnung ausfließenden Waſſers ſetzte Fig.

$$\frac{c^2}{4g} = a\left(\frac{F^2 - f^2}{F^2}\right) = a\left(1 - \frac{f^2}{F^2}\right).$$

Dieſe Formel gäbe für ſehr kleine Oeffnungen f in Vergleichung gegen den Querſchnitt F die Geſchwindigkeit $c = \sqrt{4ga}$ bey der Druckhöhe a; und für $f = F$ wäre $c = 0$, wie es der Erfahrung gemäß iſt. Ob übrigens bey dieſer Formel die mit der Erweiterung der Ausfluß-Oeffnung abnehmende Geſchwindigkeit des ausſtrömenden Waſſers mit der Erfahrung hinlänglich übereinſtimmen könne, müßten einige zu machende Verſuche entſcheiden.

Die erwähnte Bernoulliſche Formel der Hydraulik $c = \sqrt{\left(\frac{4gaF^2}{F^2 - f^2}\right)}$ ſetzet voraus, daß die oberſte Waſſerſchichte mit der Geſchwindigkeit $\sqrt{\left(\frac{4gaf^2}{F^2 - f^2}\right)}$ ſinke, und durch eine andere eben ſo große mit eben dieſer Geſchwindigkeit verſehene Waſſerſchichte in jedem Augenblicke erſetzet werde, da etwa dieſe erſetzende Waſſerſchichte aus einem oberwärts befindlichen Gefäße von unbegränzter Weite aus einer Bodenöffnung $= F$ unter der Druckhöhe $= \frac{af^2}{F^2 - f^2}$ unmittelbar auf den vorigen Waſſerſpiegel herunter ſtürzte. Wenn nähmlich daß Gefäß Fig. 27 nicht prismatiſch wäre, ſondern eine ſolche Geſtalt hätte, wie es der punctirte Durchſchnitt MmnN anzeiget, wo der Querſchnitt EF in Vergleichung gegen MN für unendlich klein angeſehen werden könnte; und man ſetzte den Querſchnitt mn $= f$, EF $= F$, die Höhe rm $= a$, rP $= x$, der ausweichenden oder ſinkenden Waſſerſchichte EF Geſchwindigkeit $= y$, und des durch mn ausſtrömenden Waſſers Geſchwindigkeit $= c$; ſo wäre für den Waſſerſtand mP vermöge §. 89. 27

$$c^2 = 4g \cdot (a + x), \text{ und } y^2 = 4gx;$$

 und

Fig. 27 und weil durch den Querſchnitt EF eben ſo viel Waſſer nachfließt, als durch mn ausſtrömet; ſo iſt auch

$$c . f = F . y, \text{ oder } c : y = F : f;$$

aus dieſen drey Gleichungen findet man

$$c = \sqrt{\left(\frac{4gaF^2}{F^2 - f^2}\right)};\ y = \sqrt{\left(\frac{4gaf^2}{F^2 - f^2}\right)};\ x = \frac{af^2}{F^2 - f^2}.$$

B. Waſſermenge in einer beſtimmten Zeit bey ungeänderter Druckhöhe.

§. 95.

Die Waſſermenge $= m$ im Kubikmaße, welche in einer gegebenen Zeit $= t$ Sec. aus einer gegebenen kleinen Oeffnung $= f$ Quadratfuß oder Zoll eines bey der Druckhöhe a beſtändig voll erhaltenen Gefäßes mit der Geſchwindigkeit $c = \sqrt{4ga}$ ausfließet, könnte man durch nachſtehende Formel ausdrucken,

$$m = tfc, \text{ oder } m = tf\sqrt{4ag},$$

wenn der Querſchnitt des ausſtrömenden Waſſerſtrahles eben ſo groß wäre, als die Oeffnungsfläche.

Denn in jeder Secunde ſtrömete aus der Oeffnung ein Waſſerprisma $= fc = f\sqrt{4ag}$, welches die Oeffnungsfläche f zur Grundfläche, und die Geſchwindigkeit des ausſtrömenden Waſſers, nähmlich den in einer Secunde gleichförmig zurück zu legenden Weg $c = \sqrt{4ag}$ zur Länge hätte. In t Secunden würden daher bey ungeänderter Druckhöhe t ſolche Waſſerprismen ausſtrömen; folglich wäre $m = tfc = tf\sqrt{4ag}$.

Allein die Erfahrung lehret uns, daß der Querſchnitt des ausſtrömenden Waſſerſtrahles merklich kleiner iſt, als die Oeffnungsfläche; oder daß ſich der ausſtrömende Waſſerſtrahl in der Ausfluß-Oeffnung gewiſſer Maßen zuſammenziehet; theils wegen des Seitendruckes, welchen die gegen die Ausfluß-Oeffnung gerichtete Waſſerſäule von dem

ſie

ſie umgebenden Waſſer leidet, theils wegen der ſchiefen Rich- Fig.
tung, nach welcher die Waſſertheilchen innerhalb der Aus-
fluß-Oeffnung ringsherum ſich gegen die Achſe derſelben verſchiedentlich hinlenken. Um nun die ausfließende Waſſermenge mit einiger Zuverläſſigkeit berechnen zu können, muß man in der angeführten Formel der Waſſermenge anſtatt der Oeffnungsfläche f den Querſchnitt des zuſammen gezogenen Waſſerſtrahles ſetzen.

§ 96.

Aus mehreren angeſtellten Verſuchen hat man gefunden, daß der Querſchnitt des zuſammen gezogenen Waſſerſtrahles zur Oeffnungsfläche ſich verhalte, für eine Ausfluß-Oeffnung

1) in einer dünnen Metallplatte wie 64 zu 100,

2) bey einer kurzen Anſatzröhre, wie 81 zu 100; oder daß der Querdurchmeſſer des zuſammengezogenen Waſſerſtrahles ſich zum Durchmeſſer der Ausfluß-Oeffnung verhalte bey einer dünnen Metallplatte wie 8 zu 10, und bey einer kurzen Anſatzröhre wie 9 zu 10.

Für die Oeffnungsfläche $= f$ in einer dünnen Metallplatte iſt daher der Querſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahles $= 0{,}64 f$; und bey einer kurzen Anſatzröhre, deren Länge kleiner ſeyn mag, als etwa der dreyfache Durchmeſſer der Oeffnung, iſt der Querſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahles $= 0{,}81 f$.

Bezeichnet man nun den erwähnten Decimal-Bruch 0,64, oder 0,81 mit α, womit man die Oeffnungsfläche multipliciren muß um den Querſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahles zu erhalten; ſo iſt für die Oeffnungsfläche $= f$ der Querſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahles $= \alpha f$.

§. 97.

Die wirkliche Waſſermenge bey den im §. 95. angeführten Umſtänden iſt daher

$$m = \alpha t f c, \text{ oder auch}$$
$$m = \alpha t f \sqrt{4ga}:$$

und für eine andere Druckhöhe $= A$, und für die dazu gehörige Geſchwindigkeit $= C = \sqrt{4gA}$, iſt bey eben

der-

Fig. derſelben Oeffnungsfläche $= f$ in eben derſelben Zeit $= t$ die ausgefloſſene Waſſermenge

$$M = \alpha t f C, \text{ oder}$$
$$M = \alpha t f \sqrt{4gA}.$$

Daraus folgt $M : m = C : c$;
wie auch $M : m = \sqrt{A} : \sqrt{a}$;
und auch $C : c = \sqrt{A} : \sqrt{a}$ wie §. 89.

Nähmlich die Waſſermengen in einerley Zeit aus gleichen Ausfluß-Oeffnungen bey verſchiedenen Druckhöhen verhalten ſich wie die Geſchwindigkeiten, oder wie die Quadratwurzeln der Druckhöhen.

Wäre aber nebſt der Druckhöhe A auch die Oeffnungsfläche $= F$, und die Zeit $= T$ von den vorigen verſchieden, ſo wäre

$$M = \alpha C F T, \text{ oder}$$
$$M = \alpha F T \sqrt{4gA};$$

daraus folgt $M : m = CFT : cft$;
wie auch $M : m = FT\sqrt{A} : ft\sqrt{a}$
und $C : c = \sqrt{A} : \sqrt{a}$.

§. 98.

Um die Zuſammenziehung des Waſſerſtrahles durch Beobachtungen zu beſtimmen, dienet die aus obiger Gleichung $m = \alpha t f \sqrt{4ga}$ fließende Formel

$$\alpha = \frac{m}{tf\sqrt{4ga}}$$

wo $tf\sqrt{4ga}$ die hypothetiſche Waſſermenge iſt, welche ohne Zuſammenziehung des Waſſerſtrahles ſtatt finden würde.

Die wirkliche Waſſermenge dividiret durch die hypothetiſche gibt daher die Verhältnißzahl der Oeffnungsfläche zum Querſchnitte des zuſammengezogenen Waſſerſtrahles.

Und auf dieſe Art hat man durch vielfältige Beobachtungen gefunden bey Oeffnungen in dünnen Metallplatten $\alpha = 0{,}64$; bey kurzen Anſatzröhren aber, ſo wie

auch

auch bey Oeffnungen in dicken Wänden der großen aus Fig. Mauer- oder Holzwerk verfertigten Waſſerbehälter $\alpha = 0{,}81$.

§. 99.

Mittelſt der Formel $m = \alpha t f \sqrt{4ga}$ laſſen ſich nun verſchiedene practiſche Aufgaben auflöſen. Z. B.

1) Ein Waſſerbehälter erhält alle 5 Secunden 3 Kubikfuß Waſſerzufluß. Man ſoll in einer Tiefe von 10 Fuß unter dem Waſſerſpiegel in die Wand eine kreisförmige Oeffnung machen, aus welcher eben ſo viel Waſſer ausfließt, als der Zufluß beträgt. Wie groß muß der Durchmeſſer dieſer Oeffnung ſeyn? Um dieſen zu finden, muß man aus der angeführten Formel die Fläche f ſuchen für $m = 3$, $t = 5$, $a = 10$, $g = 15{,}5$ (wenn die gegebenen Maße ſich auf den Wien. Fuß beziehen), und für $\alpha = 0{,}81$, weil hier die Oeffnung in einer dicken Wand anzubringen iſt. Aus der gefundenen Oeffnungsfläche iſt ſodann nach bekannten geometriſchen Gründen der Durchmeſſer des Kreiſes leicht zu finden, der dieſen Flächeninhalt hat.

2) Ein Waſſerbehälter erhält in 16 Secunden 3 Kubikfuß Waſſerzufluß. In einer ſeiner Wände befindet ſich eine Oeffnung von 2 Quadratzoll. Man fragt, wie hoch wird der Waſſerſpiegel über der Mitte der Oeffnung ſtehen müſſen, damit eben ſo viel Waſſer abfließen kann, als zufließt?

3) Durch eine 2 Quadratfuß große Oeffnung in einer dicken Wand eines Waſſerbehälters ſind bey unveränderlicher Druckhöhe von 9 Fuß 950 Kubikfuß Waſſer ausgefloſſen; man fragt, wie viel Zeit hat dieſer Ausfluß gedauert? u. ſ. w.

C. Ausleerung lothrecht ſtehender prismatiſcher Gefäße durch kleine Oeffnungen im Boden, oder in der Seitenwand.

§. 100.

Es ſey Fig. 27 bey einem prismatiſchen Gefäße ABCD

Fig. 27 F der horizontale Querſchnitt desſelben BC oder AD,
f die Oeffnungsfläche mn;
a Die Höhe Rm des Gefäßes über den Schwerpunct der Oeffnung, oder eigentlich die Vertiefung mR der Oeffnung unter dem Waſſerſpiegel vor dem Ausfluſſe;
t die Zeit, in welcher der Waſſerſpiegel von R bis r ſinket;
x die Tiefe Rr, um welche der Waſſerſpiegel in der Zeit t geſunken iſt; und
T die Zeit, in welcher ſich das Gefäß bis an die Oeffnung mn ausleeret; endlich
α der Zuſammenziehungs-Coefficient = 0,64, oder = 0,81, um aus der Oeffnungsfläche den Querſchnitt des zuſammen gezogenen Waſſerſtrahles zu finden; ſo hat man

I. Die Zeit t, in welcher der Waſſerſpiegel um die Tiefe x ſinket,

$$t = \frac{F}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}} \cdot [\sqrt{a} - \sqrt{(a-x)}].$$

II. Die Zeit T, in welcher ſich das Gefäß bis an die Oeffnung ausleeret,

$$T = \frac{F\sqrt{a}}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}}.$$

Um dieſe Formeln zu erweiſen, ſey dx das Differenziale der Tiefe x, um welches der Waſſerſpiegel in dem Differenziale der Zeit dt ſinket; ſo iſt Fdx die Waſſermenge, welche in dem Zeit-Elemente dt im Raume BEFC abnimmt, und durch die Oeffnung f ausfließt. Eben dieſe Waſſermenge aber iſt auch $= \alpha f dt \sqrt{[4g(a-x)]}$ vermöge §. 97. weil während der unendlich kleinen Zeit dt die Druckhöhe mr=mR—Rr$=a-x$ für ungeändert angeſehen werden kann.

Daher iſt $F dx = \alpha f dt \sqrt{[4g(a-x)]}$,

und

$$\text{und } dt = \frac{F}{2\alpha f g^{\frac{1}{2}}} . dx(a-x)^{-\frac{1}{2}};$$ Fig. 27

daraus folgt durch die Integration

$$t = \text{Const.} - \frac{F}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}} . \sqrt{(a-x)}:$$

nun iſt für $x = 0$ auch $t = 0$;

$$\text{daher Const.} = \frac{F}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}} . \sqrt{a};$$

$$\text{folglich I. } t = \frac{F}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}} . [\sqrt{a} - \sqrt{(a-x)}],$$

und weil für $x = a$ die Zeit $t = T$ wird,

$$\text{ſo iſt II. } T = \frac{F\sqrt{a}}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}}.$$

Anmerkung. Wenn das Gefäß nicht prismatiſch iſt, ſondern eine ſolche Geſtalt hat, daß ſich jeder horizontale Querſchnitt $= F$ als eine Function der Tiefe x ausdrucken läßt, als z. B. bey einer Halbkugel, bey einem Kegel, Paraboloid, u. ſ. w.); ſo kann die Zeit der Ausleerung t und T auch mittelſt der Integral-Rechnung beſtimmet werden, es möge die Ausflußöffnung in dem unterſten Theile des Umfanges, oder irgendwo ſeitwärts angebracht ſeyn; welches aber zur eigenen Uebung überlaſſen wird.

Mittelſt der Formel I. können verſchiedene practiſche Aufgaben aufgelöſet werden, je nachdem t, x, oder f aus den übrigen gegebenen Größen geſuchet wird. Z. B. In einem prismatiſchen Waſſerbehälter, deſſen Querſchnitt 300 Quadratfuß beträgt, befindet ſich 10 Fuß unter dem Waſſerſpiegel eine Oeffnung von 8 Quadratzoll in einer dicken Wand: um wie viel wird binnen einer halben Stunde der Waſſerſpiegel ſinken? und wie viel Waſſer wird abfließen, wenn der Behälter keinen Zufluß erhält? u. ſ. w.

§. 101.

Fig.

§. 101.

Die Formel II. im §. 100 für die Zeit der Ausleerung eines prismatiſchen Gefäßes ſetzet voraus, daß der Waſſerſtrahl beſtändig in einerley Dicke ausläuft. Da dieſes nun gegen Ende der Zeit T nicht genau ſtatt findet, weil vermöge allgemein bekannter Beobachtungen bey einer noch geringen Druckhöhe ein trichterförmiger Wirbel über der Oeffnung ſich bildet; ſo muß die Zeit, in welcher ſich das Gefäß ganz ausleeret, nach der angeführten Berechnung etwas kleiner gefunden werden, als ſie wirklich iſt. Indeſſen kann dieſe Formel doch in der Ausübung zur beyläufigen Berechnung der Zeit des Anfüllens und Ausleerens der Schleuſenkammern von gegebener Größe mit Nutzen angewendet werden.

30 Es ſey z. B. ABDC Fig. 30 ein Gefäß, welches durch beſtändigen Zufluß immer bis AC voll erhalten wird; mit dieſem ſey ein anderes leeres prismatiſches Gefäß CDFG verbunden; und die kleine Oeffnung DE ſey beyden gemein: ſo wird ſich mittelſt dieſer Oeffnung das Gefäß CDFG nach und nach mit Waſſer anfüllen, ſo daß in einer beſtimmten Zeit das Waſſer in beyden Gefäßen einerley Höhe haben wird.

Setzet man nun, daß in dem 2ten Gefäße das Waſſer ſchon bis MQ ſtehet; ſo wird die Geſchwindigkeit des durch DE ausfließenden Waſſers in dieſem Augenblicke der Höhe MC als Druckhöhe zugehören, weil bis zur Höhe MD in beyden Gefäßen das Waſſer im Gleichgewichte iſt; und weil ferner durch Beobachtungen dargethan iſt, daß der Ausfluß des Waſſers in ein niedriger ſtehendes Waſſer eben ſo geſchieht, als wenn ſich das Waſſer in die freye Luft ergießt. Die Geſchwindigkeit des aus dem erſten in das zweyte Gefäß durch DE fortſtrömenden Waſſers wird deſto kleiner, je mehr der Waſſerſpiegel MQ in die Höhe ſteiget; und wird endlich $= 0$, wenn ſolcher in CG anlanget.

Da nun hier die Bewegung des Waſſerſpiegels MQ aufwärts eben ſo beſchaffen iſt, wie im §. 100 abwärts; ſo muß die dort angegebene Gleichung für die Zeit der Aus-

leerung

leerung eines prismatiſchen Gefäßes auch hier für die Zeit Fig.
der Anfüllung auf die erwähnte Art anwendbar ſeyn. Wenn 30
daher der Querſchnitt MQ $= CG = F$, die Oeffnungs-fläche DE $= f$, die Waſſerhöhe CE $= a$, und der Zuſammenziehungs-Coefficient $= \alpha$ geſetzet wird; ſo iſt wie §. 100 die Zeit des Anfüllens des Gefäßes CDFG,

$$T = \frac{F\surd a}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}}$$

Man kann dieſe Gleichung auch unmittelbar durch die Integral-Rechnung finden. Denn es ſteige der Waſſerſpiegel MQ in der Zeit t um EM oder DM $= x$; ſo wird in dem Zeit-Elemente dt das Waſſer im Gefäße CDFG um das Prisma Fdx zunehmen; und dieſe Waſſermenge fließt in dieſem Zeit-Elemente dt durch die kleine Oeffnung ED $= f$ bey der Druckhöhe CM $= a - x$ in das Gefäß CDFG: daher iſt (vermöge §. 97.) $Fdx = \alpha f dt \surd [4g(a-x)]$; daraus folgt

$$t = \frac{F}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}}[\surd a - \surd (a-x)]$$; und die Zeit des

vollſtändigen Anfüllens $T = \frac{F\surd a}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}}$

§. 102.

Es ſey nun in einer Schleuſenkammer ABIKH Fig. 31 LM der Spiegel des Unterwaſſers; und in dem 31
Oberthore AB befinde ſich eine Oeffnung F. Man fragt, wie viel Zeit wird erfordert werden, damit ſich der Raum ABMLH der Kammer bis zur Höhe AH des Oberwaſſers anfüllet, vorausgeſetzt, daß der Spiegel des Oberwaſſers immer gleich hoch bleibe.

Um dieſe Zeit zu finden, ziehe man durch den Mittelpunct F der Oeffnung eine Horizontale FG; ſo wird der anzufüllende Kammerraum ABMLH in zwey Theile AFGH, und FBMLG getheilet, von welchen man ſich vorſtellen kann, daß der untere Theil FBMLG eben ſo angefüllet werde, als

wenn

Fig. 31 wenn bey unveränderlicher Druckhöhe AF die aus den Abmeſſungen der Schleuſenkammer bekannte Waſſermenge FBMLG aus der Oeffnung F frey ausſtrömet, wozu ſich die dazu gehörige Zeit mittelſt der Gleichung $m = \alpha f t \sqrt{4ga}$ des §. 99. n. 3. berechnen läßt. Die Zeit aber, in welcher ſich der obere Theil AFGH anfüllet, wird nach der im §. 101. angeführten Formel $T = \frac{F\sqrt{a}}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}}$ beſtimmet. Nimmt man endlich die für die einzelnen Theile der Schleuſenkammer gefundenen Zeiten zuſammen, ſo erhält man die zur Anfüllung des Kammerraumes nöthige Zeit.

Soll endlich die Zeit berechnet werden, in welcher der Waſſerſpiegel AH in der Schleuſenkammer ABIKH um die Tiefe HL bis an den Spiegel des Unterwaſſers bey L herabſinket, wenn in dem Unterthore HK das Schützbrett vor der Oeffnung aufgezogen, die Oeffnung F aber im Oberthore geſchloſſen wird; ſo findet man für die Druckhöhe HL $= a$, für den mittleren Querſchnitt der Kammer $= F$, und für die Oeffnungsfläche LK $= f$ die Zeit der Ausleerung des prismatiſchen Gefäßes AMLH eben ſo wie im §. 100 mittelſt der Formel

$$T = \frac{F\sqrt{a}}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}}.$$

§. 103.

Wenn die Ausflußöffnung in einer verticalen Wand eines Waſſerbehälters in ihrer lothrechten Höhe in Vergleichung mit der Druckhöhe beträchtlich groß iſt; ſo wird man in den vorhergehenden Fällen nicht mehr annehmen können, daß allen ausfließenden Waſſertheilchen gleiche Geſchwindigkeit zugehöre, weil die Geſchwindigkeit, mit welcher das Waſſer aus einem jeden horizontalen Streifen ausfließt, von der Tiefe abhängt, in welcher dieſer Streifen unter dem Waſſerſpiegel liegt.

Es ſey nun FQ Fig. 32 eine lothrechte Wand eines bis FG mit Waſſer angefüllten und durch Zufluß beſtändig

dig voll erhaltenen Gefäßes; und BCDE ſey eine recht- Fig. winkelige Oeffnung in dieſer Wand angebracht; ſo wird in 32 jedem horizontalen Streifen BE, PM, CD der Ausfluß-öffnung das Waſſer in dem Streifen ſelbſt mit gleicher Geſchwindigkeit ausſtrömen.

Man bezeichne durch

a = AC den Waſſerſtand, das iſt, die Höhe des Waſſerſpiegels über den unteren Rand der Oeffnung,

b = CB die Höhe } der Oeffnung,
c = CD die Breite }

x = AP die Entfernung eines unbeſtimmten horizontalen Streifens PM von dem Waſſerſpiegel FG,

m, die Waſſermenge, welche in einer Secunde durch den unbeſtimmten Theil EBPM ausfließt; und durch

M, die Waſſermenge welche in einer Secunde durch die ganze Oeffnung BCDE ausfließt:

ſo iſt die Geſchwindigkeit des ausfließenden Waſſers in dem Streifen BE $= \sqrt{4g(a-b)}$, in dem Streifen PM $= \sqrt{4gx}$, und in dem Streifen CD $= \sqrt{4ga}$, weil jeder horizontale Streifen von einer unendlich kleinen Höhe als eine ſehr kleine Oeffnung angeſehen werden kann, worin das ausſtrömende Waſſer die dazu gehörige Druckhöhe zur Geſchwindigkeitshöhe hat.

Es iſt daher das Differenziale der Waſſermenge dm in dem Streifen PM, deſſen Höhe dx und horizontale Breite PM $= c$ iſt, vermöge §. 97.

$$dm = \alpha c dx \sqrt{4gx} \text{ wegen } f = c dx;$$

daraus folgt $m = \text{Const.} + 2\alpha c g^{\frac{1}{2}} \int x^{\frac{1}{2}} dx$;

nähmlich $m = \text{Const.} + \frac{4}{3}\alpha c g^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$

Für $m = 0$ iſt $x = a - b$;

alſo $\text{Const.} = -\frac{4}{3}\alpha c g^{\frac{1}{2}}(a-b)^{\frac{3}{2}}$;

und $m = \frac{4}{3}\alpha c g^{\frac{1}{2}}[x^{\frac{3}{2}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}]$.

Setzet

Fig. 32 Setzet man endlich $x = a$, ſo wird $m = M$; folglich die Waſſermenge, welche durch die verticale rechtwinkelige Oeffnung BCDE bey einem beſtändig voll erhaltenen Gefäße in einer Secunde ausfließt,

$$M = \tfrac{4}{3}\alpha c g^{\frac{1}{2}}[a^{\frac{3}{2}} - (a - b)^{\frac{3}{2}}]$$

und in t Secunden iſt die ausgefloſſene

Waſſermenge $= \tfrac{4}{3}\alpha c g^{\frac{1}{2}} t[a^{\frac{3}{2}} - (a - b)^{\frac{3}{2}}]$.

Wäre die Oeffnung EBCD kein Rechteck, ſondern etwa ein gleichſchenkeliges Dreyeck mit der Spitze aufwärts oder abwärts gekehret; oder aber ein Kreisabſchnitt, oder ſonſt eine von einer krummen Linie dergeſtalt begränzte Fläche, daß man die Ordinate PM als eine Function von AP $= x$ durch x ausdrucken kann; ſo läßt ſich ſodann auch in ſolchen Fällen die in einer Secunde ausfließende Waſſermenge mittelſt der Integral-Rechnung beſtimmen; welches aber zur eigenen Uebung und Anwendung der erlernten Integral-Rechnung überlaſſen wird.

§. 104.

Befindet ſich in der verticalen Wand eines Waſſerbehälters eine kreisförmige Ausflußöffnung; ſo läßt ſich die in einer gegebenen Zeit ausfließende Waſſermenge bey einem beſtändig voll erhaltenen Behälter auf vorberührte Art mittelſt der Integral-Rechnung beſtimmen. Allein folgende zu erſt vom Hrn Langsdorf angegebene Näherung iſt hierzu bequemer, und für die Ausübung hinlänglich genau.

Man ſetze den Durchmeſſer der lothrechten kreisförmigen Ausflußöffnung $= b$, und die Tiefe des unterſten Punctes unter dem Waſſerſpiegel $= a$, wo $a > b$ vorausgeſetzt wird; ferner ſtelle man ſich vor, daß um dieſe kreisförmige Oeffnung ein Quadrat mit verticalen und horizontalen Seiten umgeſchrieben ſey: ſo iſt die Fläche eines ſolchen Quadrats $= b^2$, und die Kreisfläche $= \tfrac{1}{4}\pi b^2$. Nun iſt die Waſſermenge in t Secunden bey einer ſolchen quadratförmigen Oeffnung $= \tfrac{4}{3}\alpha b g^{\frac{1}{2}} t[a^{\frac{3}{2}} - (a - b)^{\frac{3}{2}}]$ wegen §. 103; und dieſe verhält ſich ohne merklichen Fehler zur

Waſ-

Waſſermenge bey der kreisförmigen Oeffnung, wie die Quadratfläche b^2 zur Kreisfläche $\frac{1}{4}\pi b^2$, nähmlich wie 1 zu $\frac{1}{4}\pi$. Fig.

Daher iſt die ausfließende Waſſermenge in t Secunden bey einer lothrechten kreisförmigen Oeffnung eines beſtändig voll erhaltenen Waſſerbehälters

$$M = \frac{1}{3}\alpha\pi b g^{\frac{1}{2}} t[a^{\frac{3}{2}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}].$$

Bey dieſer, wie bey den vorhergehenden Formeln wird $\alpha = 0{,}64$, oder $\alpha = 0{,}81$ geſetzet; je nachdem die Oeffnungen in einer dünnen Metallplatte angebracht, oder aber mit kurzen Anſatzröhren verſehen ſind. Sind die Oeffnungen in beträchtlich dicke Wände eingeſchnitten, ſo ſind ſolche ebenfalls als kurze Anſatzröhren zu betrachten; und daher iſt auch für ſolche $\alpha = 0{,}81$.

Nach der letzten Formel kann man nun die Waſſermenge berechnen, welche aus einer in einer dünnen Metallplatte angebrachten, lothrechten kreisförmigen Oeffnung von 1 Zoll im Durchmeſſer, wenn der Waſſerſpiegel nur 1 Linie über dem höchſten Puncte der Oeffnung erhalten wird, binnen 1 Minute ausfließt. Eine ſolche Waſſermenge nennen einige zuweilen einen Waſſerzoll. Die Redensart, eine Quelle gibt eine gewiſſe Anzahl Waſſerzolle, wird dadurch verſtändlich; obſchon es deutlicher iſt, wenn die Waſſermenge, die eine ſolche Quelle in einer beſtimmten Zeit gibt, im gewöhnlichen Kubikmaß, oder auch im Gewichte des Waſſers ausgedrucket wird.

§. 105.

Wenn die verticale Ausflußöffnung oben nicht geſchloſſen, ſondern offen iſt, ſo daß ſie oben durch den Waſſerſpiegel begränzet wird; ſo iſt die Höhe des Waſſerſtandes der Höhe der Oeffnung gleich, nähmlich $a = b$.

Für $a = b$ in der Formel des §. 103 findet man daher die Waſſermenge M in t Secunden aus einer oben offenen rechtwinkeligen Ausflußöffnung in einer lothrechten Wand eines beſtändig voll erhaltenen

Waſ-

Fig. Waſſerbehälters bey dem Waſſerſtande $= b$ und bey der Breite der Oeffnung $= c$

$$M = \tfrac{4}{3}\alpha b c g^{\frac{1}{2}} t \sqrt{b},$$

wo man $\alpha = 0{,}64$ ſetzen kann, weil dergleichen oben offene rechtwinkelige Einſchnitte gemeiniglich trichterförmig gemacht werden, ſo daß der innere Rand der Oeffnung ſcharf iſt, gleichſam wie in einer dünnen Metallplatte.

§. 106.

Bey dem Ausfluſſe des Waſſers aus lothrechten Oeffnungen von beträchtlicher Höhe, wo jeder horizontale Streifen mit einer andern Geſchwindigkeit ausſtrömt, ungeachtet der Waſſerſpiegel durch einen Seitenzufluß in einerley Höhe erhalten wird, nennet man die mittlere Geſchwindigkeit diejenige, bey welcher die Waſſermenge, wenn jedes Waſſertheilchen mit dieſer Geſchwindigkeit ausſtrömete, eben ſo groß wäre, als die Waſſermenge bey den verſchiedenen Geſchwindigkeiten der horizontalen Waſſerſtreifen wirklich iſt.

Setzet man nun im §. 103 die mittlere Geſchwindigkeit $= k$; ſo iſt die Waſſermenge in einer Secunde für dieſe Geſchwindigkeit $= \alpha b c k$; dieſe Waſſermenge aber iſt vermöge §. 103 $= \tfrac{4}{3}\alpha c g^{\frac{1}{2}} [a^{\frac{3}{2}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}]$; es iſt daher $\alpha b c k = \tfrac{4}{3}\alpha c g^{\frac{1}{2}} [a^{\frac{3}{2}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}]$: und daraus folget für eine verticale rechtwinkelige Oeffnung die mittlere Geſchwindigkeit

$$k = \frac{\tfrac{4}{3} g^{\frac{1}{2}} [a^{\frac{3}{2}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}]}{b}$$

und die dieſer mittleren Geſchwindigkeit zugehörige Höhe iſt

$$\frac{k^2}{4g} = \tfrac{4}{9}\left[\frac{a^{\frac{3}{2}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}}{b}\right]^2.$$

Es ſey z. B. $a = 16$, und $b = 7$, ſo iſt die der mittleren Geſchwindigkeit zugehörige Höhe $= 12{,}47$. Die zum Schwerpuncte einer ſolchen rechtwinkeligen Oeffnung gehörige Druckhöhe iſt $= 12{,}5$; jene iſt daher dieſer bey-

nahe

nahe gleich. Ueberhaupt wenn der Waſſerſtand a die Höhe b einer lothrechten Oeffnung einige Mahle übertrifft; ſo iſt ſehr nahe der Schwerpunct der Oeffnung derjenige Punct, wo die mittlere Geſchwindigkeit ſtatt findet. Fig.

Im §. 105 iſt für die mittlere Geſchwindigkeit $= k$ die Waſſermenge in einer Secunde $\frac{4}{3}\alpha bcg^{\frac{1}{2}} \sqrt{b} = \alpha bck$; folglich iſt die mittlere Geſchwindigkeit $k = \frac{2}{3}\sqrt{4gb}$, und deren Geſchwindigkeitshöhe $\frac{k^2}{4g} = \frac{4}{9}b$. Bey rechtwinkeligen verticalen Oeffnungen, die oben offen ſind; iſt daher die der mittleren Geſchwindigkeit zugehörige Höhe gleich $\frac{4}{9}$ des Waſſerſtandes über den Rand der Oeffnung.

Es wird ſowohl bey den rechtwinkeligen oben offenen, als auch bey den vorher erwähnten Ausflußöffnungen in einer lothrechten Wand eines beſtändig voll erhaltenen Waſſerbehälters vorausgeſetzet, daß die Oeffnungsfläche in Vergleichung mit der Wandfläche und mit dem horizontalen Querſchnitte oder mit dem Waſſerſpiegel noch immer ziemlich klein ſey (wie im §. 93.), ſo daß das Waſſer aller Orten im Behälter beynahe als ruhend angeſehen werden könne.

§. 107.

Was bisher von der Geſchwindigkeit und von der Menge des aus kleinen Oeffnungen im Boden oder in der Wand eines Gefäßes ausſtrömenden Waſſers beygebracht worden iſt, gilt überhaupt von einer jeden unelaſtiſchen Flüſſigkeit von gleichförmiger Dichtigkeit. Z. B. Die Geſchwindigkeit des aus einer kleinen Oeffnung eines Gefäßes unter der Druckhöhe a ausſtrömenden Queckſilbers iſt auch $c = \sqrt{4ga}$. Die Ausleerungszeit eines Gefäßes iſt einerley, es möge ſolches mit Waſſer oder mit Queckſilber angefüllet ſeyn.

Wären hingegen verſchiedene Flüſſigkeiten von verſchiedener Dichtigkeit ober der Ausflußöffnung im Gefäße über einander befindlich; ſo muß man aus den bekannten ſpecifi-

Fig. ſchen Gewichten die Preſſungen der verſchiedenen Flüſſigkeiten gegen die Oeffnungsfläche in andere flüſſige Säulen verwandeln, welche mit der ausſtrömenden Flüſſigkeit einerley Dichtigkeit und dabey eine ſolche Höhe haben, daß die Preſſung gegen die Ausflußöffnung eben dieſelbe verbleibe. Auf dieſe Art erhält man die eigentliche Druckhöhe der geſammten Preſſung gegen die ausſtrömende Schichte; nähmlich die Höhe einer gleichgültigen Säule, welche in ihrem ganzen Inhalte mit der ausſtrömenden Schichte einerley Flüſſigkeit enthält; und dieſe auf die Dichtigkeit der ausſtrömenden Flüſſigkeit reducirte Druckhöhe iſt die der geſuchten Geſchwindigkeit zugehörige Höhe.

Wäre nun ein Gefäß von der Ausflußöffnung an bis zu einer Höhe von 3 Fuß mit Queckſilber, und von da an noch weiters 7 Fuß hoch mit Waſſer angefüllet, deſſen Dichtigkeit nur $\frac{1}{14}$ des Queckſilbers ſey; ſo wird die Oeffnungsfläche von dem anliegenden Queckſilber ſo ſtark gepreſſet, als wenn das Gefäß durchaus mit Queckſilber jedoch nur bis zur Höhe von $3\frac{1}{2}$ Fuß angefüllet wäre; die Waſſerhöhe von 7 Fuß iſt nähmlich gleichgültig mit einer Queckſilberhöhe von $7 \times \frac{1}{14} = \frac{1}{2}$ Fuß. Die Druckhöhe gegen die Queckſilberſchichte an der Oeffnung iſt daher in einem ſolchen Falle $= 3\frac{1}{2}$ Fuß und die Geſchwindigkeit des ausſtrömenden Queckſilbers $c = \sqrt{(4 \times 15\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2})} = 14{,}73$ Fuß.

Wäre ein auf die angeführte Art gefülltes Gefäß in Geſtalt eines Springbrunnens eingerichtet; ſo würde der ſpringende Queckſilberſtrahl bey der vortheilhafteſten Einrichtung nur eine Höhe von höchſtens $3\frac{1}{2}$ Fuß erreichen. Wenn hingegen die Vorrichtung ſo getroffen wäre, daß das Waſſer unten, das Queckſilber oben, und zwar wie ehevor die Druckhöhe des Waſſers von der Ausflußöffnung an 7, und des Queckſilbers weiter hinauf 3 Fuß wäre; ſo müßte der Queckſilberdruck von 3 Fuß Höhe in einen gleichgültigen Waſſerdruck von der Höhe $3 \times 14 = 42$ Fuß verwandelt werden: es wäre daher die geſammte Druckhöhe gegen die Waſſerſchichte an der Ausflußöffnung $= 49$ Fuß, und die Geſchwin-

Geſchwindigkeit des ausſtrömenden Waſſerſtrahles c = Fig.
$\sqrt{(4 \times 15\frac{1}{2} \times 49)} = 55{,}1$ Fuß.

§. 108.

Die Lehre von dem Ausfluſſe des Waſſers aus Gefäßen wollen wir mit folgender Unterſuchung beſchließen.

Gewöhnliche atmoſphäriſche Luft von einer 900 mahl geringeren Dichtigkeit als Waſſer, und von einer ſolchen Elaſticität, daß die Elaſticitäts-Druckhöhe der Waſſerdruckhöhe von 32 Fuß gleich ſey, befinde ſich in einem Gefäße eingeſchloſſen. Ringsherum gedenke man einen unbegränzten, und vollkommen leeren Raum. In dem Gefäße werde ſodann eine kleine Oeffnung gemacht. Man fragt: Mit welcher Geſchwindigkeit wird die Luft auszuſtrömen anfangen? und wie groß iſt dieſe Geſchwindigkeit, nachdem bereits eine gegebene Menge Luft aus dem Gefäße entflohen iſt?

Um die Geſchwindigkeit = c der ausſtrömenden Luft bey den angenommenen Umſtänden zu finden, ſey wie Fig. 27 die Oeffnungsfläche = f Quadratfuß; ſo iſt die Maſſe der zum Ausſtrömen angetriebenen Luftſchichte von einer unendlich kleinen Dicke e, nähmlich die zu bewegende Maſſe = $fe \cdot \frac{1}{900}$, und die bewegende Kraft = $f \cdot 32$ für das eigenthümliche Gewicht eines Kubikfußes Waſſer = 1. Vermöge der allgemeinen Formel $c^2 = \frac{4gPs}{M}$ (3. Th. §. 50.) für $g = 15\frac{1}{2}$ Fuß, $P = 32f$, $M = \frac{ef}{900}$, und $s = e$ iſt daher die Geſchwindigkeit, welche die ausſtrömende Luftſchichte ef nach Zurücklegung des unendlich kleinen Weges e, das iſt gleich im Anfange der Bewegung erlanget, $c = \sqrt{(62 \times 32 \times 900)} = 1336$ Fuß; und die der Ausſtrömungsgeſchwindigkeit der Luft bey den angeführten Umſtänden zugehörige Höhe iſt $\frac{c^2}{4g} = 32 \times 900 =$

 28800

Fig. 28800 Fuß = der auf eine Waſſerdruckhöhe reducirten Elaſticitätshöhe multipliciret mit der Verhältnißzahl der Waſſerdichtigkeit gegen Luftdichtigkeit.

Nun ſey bereits $\frac{1}{n}$ der anfänglichen Luft aus dem Gefäße durch die Oeffnung f entflohen, und habe ſich ringsherum in dem unbegränzten leeren Raume verbreitet, oder ſey gleichſam gänzlich verſchwunden; die noch übrige nun verdünnte Luft aber $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$ ſey vermöge ihrer noch beyhabenden Elaſticität in dem Gefäße gleichförmig verbreitet, ſo iſt ſodann die Dichtigkeit der noch im Gefäße eingeſchloſſenen Luft $= (\frac{n-1}{n}) . \frac{1}{900}$, und die auf den Waſſerdruck reducirte Elaſticitätshöhe (vermöge §. 68.) nur noch $= (\frac{n-1}{n}) . 32$ Fuß; die zu bewegende Maſſe M iſt daher in dieſem Falle die Luftſchichte $= f . e . (\frac{n-1}{n}) . \frac{1}{900}$, und die bewegende Kraft P iſt $= f . (\frac{n-1}{n}) . 32$; folglich iſt die Geſchwindigkeitshöhe der nun verdünnten ausſtrömenden Luft =

$$\frac{c^2}{4g} = \frac{Ps}{M} = f . (\frac{n-1}{n}) . 32 \times e \times \frac{n900}{f.e.(n-1)} =$$

$32 \times 900 = 28800$ Fuß, eben ſo groß, wie im Anfange der Ausſtrömung bey der größeren Dichtigkeit und Elaſticität.

Würde anfänglich ſo viel Luft in das Gefäß hineingepreſſet, daß ihre Dichtigkeit $n$mahl größer wäre, als die Dichtigkeit der gewöhnlichen atmoſphäriſchen Luft $\frac{1}{900}$ der Waſſerdichtigkeit; ſo wäre auch die auf den Waſſerdruck reducirte Elaſticitätshöhe $n$mahl größer als die Elaſticitätshöhe von 32 Fuß der gewöhnlichen Luft;

und das Product aus der Elaſticitätshöhe $32n$ multi- Fig.
pliciret mit der Verhältnißzahl $\frac{900}{n}$ der Waſſerdichtigkeit zur Luftdichtigkeit, als die der Ausſtrömungsgeſchwindigkeit zugehörige Höhe wäre auch $= 32n \times \frac{900}{n} = 32 . 900 = 28800$ Fuß, eben ſo groß wie in den vorher bemerkten Fällen.

Die in einem Gefäße eingeſchloſſene atmoſphäriſche Luft, es möge ſolche darin wie immer verdichtet, oder wie immer verdünnet ſeyn, ſtrömet alſo durch eine gemachte Oeffnung in einen unbegränzten leeren Raum unaufhörlich mit einer unveränderlichen Geſchwindigkeit hinaus, ſo lange die noch im Gefäße übrige Luftmenge elaſtiſch verbleibet; und die Geſchwindigkeitshöhe einer ſolchen Ausſtrömungsgeſchwindigkeit iſt gleich der auf den Waſſerdruck reducirten Elaſticitätshöhe multipliciret mit der Verhältnißzahl der Waſſerdichtigkeit zur Luftdichtigkeit.

Wäre anſtatt der atmoſpäriſchen eine andere, z. B. brennbare Luft (welche bey der auf Waſſerdruck reducirten Elaſticitätshöhe von 32 Fuß 9mahl dünner ſey als atmoſphäriſche Luft, und deren Dichtigkeit alſo nur $\frac{1}{9 \times 900} = \frac{1}{8100}$ der Waſſerdichtigkeit iſt) in einem Gefäße eingeſchloßen; und es würde dieſer ſo eingeſchloſſenen Luft durch eine Oeffnung der Ausgang in einen unbegränzten leeren Raum geſtattet: ſo wäre die der Ausſtrömungsgeſchwindigkeit zugehörige Höhe $= 32 \times 8100 = 259200$ Fuß; da hier die Verhältnißzahl der Waſſerdichtigkeit zur Luftdichtigkeit 8100 iſt. Eine ſolche Luft würde daher mit der unveränderlichen Geſchwindigkeit $c = \sqrt{62 \times 259200} = 4008$ Fuß in einen unbegränzten leeren Raum unaufhörlich hinausſtrömen.

Nun iſt es auch leicht zu beſtimmen, mit welcher Ge-

Fig. Geſchwindigkeit die in einem Gefäße zuſammen gepreßte Luft durch eine Verbindungsöffnung in ein anderes Gefäß, worin eine eben ſolche Luftart von eben der Temperatur, aber von geringerer Dichtigkeit befindlich iſt, einzuſtrömen anfängt, und mit immer abnehmender Geſchwindigkeit ſo lange fort ſtrömet, bis die Luft in beyden Gefäßen von einerley Dichtigkeit, und ſo im Gleichgewichte iſt. Wenn nähmlich die Verhältnißzahl der Waſſerdichtigkeit zur Luftdichtigkeit im erſten Gefäße bey der zuſammen gepreßten Luft $= n$, im zweyten bey der dünneren Luft $= N$, und die auf Waſſerdruck reducirte Elaſticitätshöhe im erſten Gefäße $= a$ iſt; ſo iſt die Elaſticitätshöhe der Luft im 2ten Gefäße nur $= \frac{na}{N}$ (vermöge §. 67.); die Luftſchichte $= f \,.\, e \,.\, \frac{1}{n}$ an der Oeffnung f im erſten Gefäße wird daher in das 2te Gefäß mit einer Kraft $= f \,.\, a$, und von der dünneren Luft im 2ten Gefäße nach der entgegen geſetzten Richtung mit der Kraft $= f \,.\, \frac{na}{N}$ gepreſſet. Daraus folgt die bewegende Kraft $P = fa - \frac{nfa}{N} = af.(\frac{N-n}{N})$, wodurch im Anfange der Bewegung die Luftſchichte $f.e. \frac{1}{n}$ als die zu bewegende Maſſe M in der Verbindungsöffnung f aus dem erſten Gefäße in das 2te getrieben wird; und folglich iſt die zur Ausſtrömungsgeſchwindigkeit c im Anfange der Bewegung zugehörige Höhe $\frac{c^2}{4g} = \frac{na(N-n)}{N}$ wegen der allgemeinen Formel $\frac{c^2}{4g} = \frac{Ps}{M}$ für $P = \frac{af(N-n)}{N}$, $M = fe.\frac{1}{n}$, und $s = e$; wo nun die Ausſtrömungs-

geſchwin-

geſchwindigkeit immer kleiner wird, je mehr ſich N und n Fig.
der Gleichheit nähern, ſo daß für $N = n$ die Geſchwindigkeit $= 0$ iſt; für $N = \infty$ aber in Rückſicht n iſt $\frac{c^2}{4g} = an$ wie bey der Ausſtrömung der Luft in einen leeren Raum.

II. Abſchnitt.

Von dem Stoße des fließenden Waſſers gegen die Oberflächen der eingetauchten feſten Körper.

§. 109.

Stößt fließendes Waſſer ſenkrecht gegen eine eingetauchte und unbeweglich gehaltene feſte Ebene, deren Flächeninhalt in Vergleichung mit dem Querſchnitte des fließenden Waſſers klein iſt, damit das anſtoſſende Waſſer ringsherum frey abfließen könne; ſo iſt der gegen eine ſolche Ebene entſtehende Stoß oder hydrauliſche Druck dem Gewichte einer Waſſerſäule gleich, welche die angeſtoßene Ebene zur Grundfläche, und die der Geſchwindigkeit des Waſſers zugehörige Höhe zu ihrer Länge hat. Wenn nähmlich Fig. 33 der In- 33
halt der Fläche AB $= f$ Quadratfuß (es iſt AB die Anſicht von oben einer dem ſenkrechten Waſſerſtoße ausgeſetzten feſten Ebene), das Gewicht eines Kubikfußes Waſſer $= q$ Pfund, die Geſchwindigkeit des Waſſers $= c$, die bekannte Beſchleunigung der Schwere $= g$ Fuß, und der geſuchte Waſſerſtoß $= P$ geſetzet wird, ſo iſt

$P =$

Fig. 33

$$P = \frac{c^2 fq}{4g}.$$

Um dieſe Wahrheit einzuſehen, gedenke man ſtatt der feſten Ebene AB eine feſte Maſſe mit dem Waſſer von einerley Dichtigkeit in Geſtalt eines geraden Prisma, welches die Ebene AB $= f$ zur Grundfläche, und nach der Richtung des Waſſerſtromes eine unendlich kleine Dicke $= e$ habe. Wenn nun ein ſolches Prisma dem ſenkrechten Stoße des Waſſers ausgeſetzet, und ſodann der Wirkung desſelben mit Beſeitigung der feſthaltenden Kraft plötzlich überlaſſen wird; ſo erhält es ſogleich mit dem fortfließenden Strome die dieſem eigene Geſchwindigkeit $= c$, ſo wie ein in fortfließendes Waſſer gefallener Regentropfen. In einem ſolchen Falle ſind die bewegte Maſſe oder das Gewicht des erwähnten Prisma $M = feq$, und die Geſchwindigkeit $= c$, welche die bewegte Maſſe nach Zurücklegung des unendlich kleinen Weges e, das iſt gleich im Anfange der Bewegung wie bey der Ausſtrömung des Waſſers durch eine kleine Oeffnung erlanget, bekannt; die bewegende Kraft $= P$ aber, welche hier der Waſſerſtoß iſt, und während der unendlich kleinen Zeit, in der die Geſchwindigkeit $= c$ erzeuget wird, für unveränderlich angeſehen werden kann, iſt zu ſuchen. Dieſe Kraft P findet man aus der bekannten allgemeinen Formel $c^2 = \frac{4gPs}{M}$ (3. Th. §. 50.) wo in dieſem Falle $M = feq$, und $s = e$ iſt; es iſt alſo hier $P = \frac{c^2 fq}{4g} = f \cdot \frac{c^2}{4g} \cdot q =$ dem Gewichte eines Waſſer-Prisma von der Grundfläche f und von der Höhe oder Länge $\frac{c^2}{4g}$, welche letztere die Geſchwindigkeitshöhe des fließenden Waſſers iſt. Soll nun nach der entgegen geſetzten Richtung eine Kraft angebracht werden, welche dem Waſſerſtoße gegen die Fläche f das Gleichgewicht hält, und ſo die Bewegung des erwähnten feſten Prisma verhindert; ſo muß dieſe entge-

entgegen wirkende Kraft offenbar eben ſo groß ſeyn, als der Fig. gefundene Waſſerſtoß $P = \frac{c^2 fq}{4g}$. Sind zwey ſolche Kräfte, die gegen das erwähnte feſte Prisma nach entgegen geſetzten Richtungen wirken, einmahl im Gleichgewichte; ſo wird das Gleichgewicht nicht geſtöret, wenn ſodann ſtatt des erwähnten feſten Prisma nur eine feſte Ebene des Inhalts $= f$, oder auch ein anderes feſtes Prisma von eben derſelben Grundfläche $= f$, aber von einer anderen beliebigen Länge und Dichtigkeit zwiſchen die zwey entgegen geſetzten Kräfte geſtellet wird. Auch wird der gefundene Waſſerſtoß gegen die Fläche f nicht geändert, wenn anſtatt der nach entgegen geſetzter Richtung wirkenden, den Waſſerſtoß aufhaltenden Kraft eine ſonſtige Feſthaltung der Fläche f angebracht wird, welche das Ausweichen dieſer Fläche verhindert. Der ſenkrechte Stoß des fließenden Waſſers gegen eine eingetauchte und unbeweglich gehaltene feſte Ebene, oder auch gegen die Grundfläche eines feſtgehaltenen geraden Prisma iſt daher gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule, welche die geſtoßene Ebene zur Grundfläche, und die der Geſchwindigkeit des fließenden Waſſers zugehörige Höhe zu ihrer Länge hat.

Es muß aber, damit dieſer Satz in der Ausübung zutreffe, die dem Stoße ausgeſetzte Fläche in Vergleichung mit dem Querſchnitte des fließenden Waſſers nur klein ſeyn, damit das anſtoßende Waſſer frey abfließen könne, und in ſeiner Bewegung nicht merklich geändert werde, weil ſonſt, wenn die dem Stoße ausgeſetzte Fläche beynahe ſo groß iſt, als der Querſchnitt des fließenden Waſſers, eine Aufſchwellung vorwärts der Stoßfläche, und eine Erniedrigung des Waſſers hinter derſelben verurſachet wird, wodurch nicht nur die Geſchwindigkeit des Waſſers ſich ändert, ſondern der hydrauliſche Stoß auch noch mit einem hydroſtatiſchen Drucke verbunden iſt.

Die Dicke des Prisma, und die Länge des Weges e muß man in dem geführten Beweiſe unendlich klein annehmen,

Fig. men, eigentlich nur ſo klein, daß die geſuchte bewegende Kraft während der Zurücklegung des Weges e für unveränderlich angeſehen werden könne.

§. 110.

Wie groß nun der ſenkrechte Waſſerſtoß gegen eine feſte Fläche $= f$ von beträchtlicher Ausdehnung ſey, wenn der gegebene Querſchnitt $= F$ des fließenden Waſſers auch in Erwägung gezogen werden ſoll, läßt ſich bloß allein aus den Gründen der Mechanik nicht ableiten. Indeſſen haben einige darüber angeſtellte Verſuche gezeiget, daß man in einem ſolchen Falle den ſenkrechten Waſſerſtoß für die Geſchwindigkeit $= c$, und für das eigenthümliche Gewicht des Waſſers $= q$ durch folgende Formel vorſtellen könne,

$$P = \frac{c^2 fq}{4g} . (1 + \frac{f}{F}),$$

wo für $F = \infty$ in Vergleichung mit f der Stoß ſo groß wird, wie im §. 109; für $f = F$ aber iſt er doppelt ſo groß, das iſt, die den Waſſerſtoß vorſtellende Säule auf der Grundfläche f hat die 2fache Geſchwindigkeitshöhe zu ihrer Länge.

§. 111.

Aus dem gefundenen Werthe für den ſenkrechten Stoß $P = \frac{c^2 fq}{4g}$ des fließenden Waſſers gegen eine feſte Ebene (§. 109.) kann man verſchiedene nützliche Folgen ableiten. Z. B.

1) Bey verſchiedenen Geſchwindigkeiten des fließenden Waſſers iſt der ſenkrechte Stoß den quadrirten Geſchwindigkeiten proportional. Denn weil $P = \frac{c^2 fq}{4g}$, und $P' = \frac{C^2 fq}{4g}$ für eine andere Geſchwindigkeit C iſt; ſo iſt auch $P : P' = c^2 : C^2$.

2) Bey einerley Geſchwindigkeit und verſchiedenen Stoßflächen iſt der ſenkrechte Waſſerſtoß den Stoß-

flächen

Fig.

flächen proportional. Denn aus $P = \frac{c^2 fq}{4g}$, und $P' = \frac{c^2 Fq}{4g}$ folgt $P : P' = f : F$.

3) Bey verſchiedenen Geſchwindigkeiten und verſchiedenen Stoßflächen iſt der ſenkrechte Waſſerſtoß dem Producte aus den Stoßflächen in die quadrirten Geſchwindigkeiten proportional. Denn aus $P = \frac{c^2 fq}{4g}$, und $P' = \frac{C^2 Fq}{4g}$ folgt $P : P' = c^2 f : C^2 F$.

4) Der ſenkrechte Waſſerſtoß gegen eine ebene Fläche von 1 Quadratfuß bey der Geſchwindigkeit des Waſſers von 1 Fuß für $g = 15\frac{1}{2}$ Fuß, und $q = 56\frac{3}{8}$ Pfund iſt $= 29\frac{1}{10}$ Loth Wiener Gewicht. Daraus kann man nach 1) 2) oder 3) in jedem andern Falle den ſenkrechten Waſſerſtoß in Wien. Pfunden berechnen.

5) Iſt die anſtoßende Flüſſigkeit nicht gemeines Waſſer; ſo muß man für eine ſolche Flüſſigkeit den Werth von q als das Gewicht eines Kubikfußes gehörig beſtimmen, um nach der angeführten Formel den Stoß berechnen zu können. Z. B. Bey dem Stoße des Windes iſt $q = \frac{56\frac{3}{8}}{900}$ Pfund, wenn die Verhältnißzahl der Waſſerdichtigkeit zur Luftdichtigkeit $= 900$ iſt. Bey einer ſolchen Dichtigkeit der Luft ſind Windſtoß und Waſſerſtoß gegen gleich große Flächen einander gleich, wenn die Geſchwindigkeit des Waſſers nur $\frac{1}{30}$ der Geſchwindigkeit des Windes beträgt. Denn bey dieſer Vorausſetzung iſt der ſenkrechte Windſtoß $= \frac{c^2 f}{4g} \cdot \frac{56\frac{3}{8}}{900}$ gegen eine Fläche f bey der Geſchwindigkeit des Windes c; und der ſenkrechte Waſſerſtoß bey der Geſchwindigkeit $\frac{c}{30}$ gegen die nähmliche ebene Fläche iſt $= \frac{c^2 f . 56\frac{3}{8}}{900 . 4g}$ eben ſo groß wie der Windſtoß. Man findet daher auch den

Fig. den ſenkrechten Windſtoß gegen eine ebene Fläche, wenn man für den 30ten Theil der gegebenen Geſchwindigkeit des Windes den Waſſerſtoß gegen die nähmliche Stoßfläche berechnet.

§. 112.

1) Der ſchiefe Waſſerſtoß gegen eine ebene Fläche nach der darauf ſenkrechten Richtung iſt gleich dem ſenkrechten Stoße gegen eine eben ſo große Fläche multipliciret mit dem quadrirten Sinus des Neigungswinkels der Stoßfläche gegen die Richtung des Waſſerſtromes.

2) Nach der Richtung des Waſſerſtromes aber iſt der ſchiefe Stoß gleich dem ſenkrechten Stoße gegen eine eben ſo große Fläche multipliciret mit dem cubirten Sinus des Neigungswinkels der Stoßfläche gegen die Richtung des Stromes.

3) Nach einer auf den Strom ſenkrechten Richtung endlich iſt der ſchiefe Waſſerſtoß gleich dem ſenkrechten multipliciret mit dem quadrirten Sinus, und mit dem einfachen Coſinus des Neigungswinkels der Stoßfläche gegen die Richtung des Stromes.

34 Wenn nähmlich eine feſte Ebene BC $= f$ Fig. 34 unter dem Neigungswinkel BAF $= \phi$ dem Stoße eines nach der Richtung FAE mit einer Geſchwindigkeit $= c$ fließenden Stromes ausgeſetzet wird, und g bedeutet wie bisher die Beſchleunigung der Schwere, q aber das eigenthümliche Gewicht eines Kubikfußes der ſtoßenden flüßigen Maſſe; ſo leidet die Stoßfläche BC

1) nach der auf BC ſenkrechten Richtung AG eine Preſſung $= \frac{c^2 fq.\sin^2\phi}{4g}$,

2) nach der Richtung des Stromes FAE eine Preſſung $= \frac{c^2 fq.\sin^3\phi}{4g}$,

3) nach einer auf FAE ſenkrechten Richtung von A nach H eine Preſſung $= \frac{c^2 fq . \sin^2 \varphi . \cos \varphi}{4g}$. Fig. 34

Um dieſe Wahrheiten einzuſehen zerfälle man die Geſchwindigkeit $= c$ des Stromes mittelſt des Rechteckes AGEI in zwey andere gleichgültige Geſchwindigkeiten, eine ſenkrecht auf BC nach der Richtung AG, und die andere nach der Richtung AI oder GE parallel mit BC. Wenn man nun die gegebene Geſchwindigkeit $c =$ AE ſetzet; ſo iſt die Geſchwindigkeit nach der auf BC ſenkrechten Richtung AG $= c . \sin \varphi$, weil AG : AE ($c =$ sin AEG (sin φ : sintot (1 ſich verhält; die andere Geſchwindigkeit aber nach der Richtung AI iſt $= c . \cos \varphi$. Dieſe letztere, da ihre Richtung mit der Ebene CB parallel iſt, bewirket keinen Stoß gegen dieſe Ebene; vermöge der erſteren Geſchwindigkeit $c . \sin \varphi$ aber nach der auf BC ſenkrechten Richtung AG wird die Ebene BC nach dieſer Richtung AG ſo ſtark gepreſſet, als wenn ein mit der Geſchwindigkeit $c . \sin \varphi$ fortfließender Strom gegen ſolche ſenkrecht ſtieße. Wegen §. 109. iſt daher nach dieſer Richtung AG die Preſſung oder der Stoß $= \frac{c^2 \sin^2 \varphi}{4g} . fq = \frac{c^2 fq}{4g} . \sin^2 \varphi =$ dem ſenkrechten Stoße multipliciret mit dem quadrirten Sinus des Neigungswinkels.

Um die Preſſungen der Ebene BC nach der Richtung AE in der Verlängerung der Stromrichtung, und auch nach AH ſenkrecht auf FE zu beſtimmen, darf man nur die bereits gefundene Preſſung nach der Richtung AG in zwey andere gleichgültige mittelſt des Rechteckes HK zerlegen. Wenn man nähmlich die ſchon gefundene Preſſung $\frac{c^2 fq . \sin^2 \varphi}{4g} =$ AG ſetzet; ſo iſt vermöge des Kräften-Parallelogramms HK nach der Richtung FAE die Preſſung oder der Stoß AK $=$ AG . sin AGK $= \frac{c^2 fq . \sin^2 \varphi}{4g} \times \sin \varphi =$

c^2

Fig. 34 $\frac{c^2 fq.\sin^3\varphi}{4g}$; und nach der auf FE ſenkrechten Richtung von A gegen H iſt der Stoß AH $=$ AG.cosHAG $= \frac{c^2 fq.\sin^2\varphi.\cos\varphi}{4g}$. Der ſchiefe Waſſerſtoß gegen eine feſte ebene Fläche nach der Richtung des Stromes iſt daher gleich dem ſenkrechten Stoße gegen eine eben ſo große Fläche multipliciret mit dem cubirten Sinus des Neigungswinkels; nach der auf den Strom ſenkrechten Richtung aber iſt der ſchiefe Waſſerſtoß gleich dem ſenkrechten multipliciret mit dem quadrirten Sinus und mit dem einfachen Coſinus des Neigungswinkels der Stoßfläche gegen die Richtung des Stromes.

§. 113.

Es gibt eine Lage der feſten Ebene BC, bey welcher der Stoß $\frac{c^2 fq.\sin^2\varphi.\cos\varphi}{4g}$ nach der auf den Strom ſenkrechten Richtung AH §. 112. ein Größtes wird. Denn ſowohl für $\varphi = 0$, als auch für $\varphi = 90°$ iſt dieſer Waſſerſtoß $= 0$. Dieſer Waſſerſtoß wächſt nähmlich bey einerley c, f, q mit dem Zunehmen des Winkels φ von 0 bis auf einen gewiſſen beſtimmten Werth, und nimmt ſodann bey dem weiteren Wachſen des Winkels φ wieder ab, ſo daß er für $\varphi = 90°$ wieder $= 0$ wird.

Um den Neigungswinkel φ zu finden, bey welchem eine dem Waſſerſtrome nach einer ſchiefen Richtung ausgeſetzte feſte Ebene nach der auf den Strom ſenkrechten Richtung den größten Stoß leidet, darf man nur den gefundenen Werth für dieſen Stoß $\frac{c^2 fq}{4g} \times \sin^2\varphi\cos\varphi$, oder wegen des beſtändigen Factors eigentlich nur $\sin^2\varphi.\cos\varphi$ differenziren, und das Differenziale $= 0$ ſetzen; auf dieſe Art erhält man eine Gleichung, woraus ſich der geſuchte Winkel φ beſtimmen läßt.

Es

Es iſt nähmlich Fig. 34

$d(\sin^2\varphi.\cos\varphi) = 2d\varphi.\sin\varphi\cos^2\varphi - d\varphi.\sin^3\varphi = 0$ daraus folgt $2\cos^2\varphi = \sin^2\varphi$, oder $2(1-\sin^2\varphi) = \sin^2\varphi$, und $2 = 3\sin^2\varphi$; folglich $\sin\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6} = 0{,}8164966$, und der geſuchte Neigungswinkel $\varphi = 54^\circ\ 44'$.

Dieſe Unterſuchung findet bey den ſo genannten fliegenden Brücken ihre Anwendung. Wenn man nähmlich die fliegende Brücke ſo ſtellet, daß bey ihrer Bewegung von einem Ufer zum anderen die Richtung des Stromes mit der Mittellinie der fliegenden Brücke einen Winkel von beyläufig $54\frac{3}{4}$ Grad einſchließt; ſo wird die auf die Richtung des Stromes ſenkrechte Kraft, wodurch die an einem langen Seile befeſtigte fliegende Brücke von einem Ufer zum anderen getrieben wird, ein Größtes ſeyn, und auf dieſe Art die Ueberſchiffung in der kürzeſten Zeit geſchehen.

Auf dieſelbe Art, wie man den vortheilhafteſten Neigungswinkel für eine fliegende Brücke gefunden hat; läßt ſich auch bey den Windmühlen der Winkel beſtimmen, unter welchem die Flächen der Windflügel gegen ihre Umdrehungsachſe oder gegen die Richtung des Windes geneigt ſeyn müſſen, damit der die Umdrehung des Windflügelrades bewirkende Stoß ein Größtes wird.

§. 114.

Wenn man in die Gleichungen für den ſchiefen Waſſerſtoß im §. 112 anſtatt der Stoßfläche BC $= f$ den Querſchnitt BD $= b$ des gegen ſolche anſtoßenden Waſſers hineinbringt, ſo iſt

1) Der Stoß nach der auf BC ſenkrechten Richtung AG $= \frac{bc^2q}{4g}.\sin\varphi =$ dem ſenkrechten Waſſerſtoße gegen eine dem Querſchnitte des anſtoßenden Waſſerſtrahles gleiche Fläche multipliciret mit dem Sinus des Neigungswinkels der Stromrichtung gegen die Stoßfläche.

Fig. 34 2) Der Stoß nach der Richtung des Waſſers AK iſt $= \frac{bc^2q}{4g}.\sin^2\varphi =$ dem ſenkrechten Stoße gegen eine dem Querſchnitte des anſtoßenden Waſſerſtrahles gleiche Fläche multipliciret mit dem quadrirten Sinus des Neigungswinkels der Stromrichtung gegen die Stoßfläche.

Denn für $BC = f$, $BD = b$, und $FAB = DCB = \varphi$ iſt $f = \frac{b}{\sin\varphi}$; folglich erhält man allhier 1) und 2) wenn man in §. 112. 1) und 2) den Werth $\frac{b}{\sin\varphi}$ ſtatt f ſubſtituiret.

§. 115.

35 Wenn man nun ein gerades Parallelepipedum AD Fig. 35 mit ſeiner Grundfläche AB $= b$ dem ſenkrechten Stoße eines mit der Geſchwindigkeit c nach der Richtung FG fließenden Stromes gerade entgegen ſetzt; ſo iſt vermöge §. 109. der ſenkrechte Stoß oder Druck gegen die Fläche AB nach der Richtung des Stromes $= \frac{bc^2q}{4g}$ für das eigenthümliche Gewicht der Flüſſigkeit q; ſo groß muß demnach auch die nach einer entgegen geſetzten Richtung angebrachte Kraft ſeyn, um dieſem Stoße das Gleichgewicht zu halten.

Verbindet man aber mit der Grundfläche AB dieſes Parallepipedums einen Keil AFB von der Höhe EF $= a$; ſo leiden die zwey gleichen Seitenflächen des Keiles FA und FB zuſammen genommen, und daher auch das Parallelepipedum von dem nach der Richtung FG anſtoßenden Strome einen ſchiefen Stoß, deſſen Größe nach der Richtung FG (vermöge §. 114.) gleich iſt dem ſenkrechten Stoße $\frac{bc^2q}{4g}$ gegen AB multipliciret mit dem quadrirten Sinus des Neigungswinkels BFE oder AFE. Es iſt aber, wenn die

die Linie BA $= k$ geſetzet wird, $\sin^2 \text{BFE} = \frac{k^2}{k^2 + 4a^2}$ Fig. 35
wegen sin BFE : EB($\frac{1}{2}k$ = sintot(1 : BF($\sqrt{[\frac{1}{4}k^2 + a^2]}$; folglich iſt der Stoß gegen ein ſolches mit einem angeſetzten Keile verſehenes Parallelepipedum nach der Richtung des Stromes $= \frac{bc^2q}{4g} . \frac{k^2}{k^2 + 4a^2}$.

Iſt $a = \frac{1}{2}k$, nähmlich FE = EB = EA, ſo iſt der Winkel AFB $= 90°$, und $\frac{k^2}{k^2 + 4a^2} = \frac{1}{2}$; der Stoß gegen ein ſolcher Geſtalt keilförmig zugeſpitztes Parallelepipedum iſt daher nur halb ſo groß, als wenn das Parallepipedum ſenkrecht abgeſchnitten iſt.

Uebrigens wird der Stoß bey einerley AB deſto kleiner, je größer die Höhe EF des Keiles gemacht wird. Daraus iſt erſichtlich, warum man die Brückenpfeiler, die Schiffe der Schiffmühlen, und mehr dergleichen dem Waſſerſtoße ausgeſetzte Körper an der Stoßſeite keilförmig macht. Jedoch darf ein dergleichen keilförmiger Rücken nicht allzuſcharf ſeyn, damit er durch den Anſtoß anderer feſter Körper, die der Waſſerſtrom mitbringt, nicht ſo leicht beſchädiget werde.

§. 116.

Der Stoß eines fließenden Stromes gegen die krumme Oberfläche eines geraden ſenkrecht abgekürzten Kegels, der nach der Richtung ſeiner Achſe dem Stoße ausgeſetzet wird, iſt nach dieſer Richtung gleich dem ſenkrechten Stoße gegen eine der krummen Oberfläche des Kegels gleich große Ebene multipliciret mit dem cubirten Sinus des Neigungswinkels der Seite des Kegels gegen deſſen Achſe.

Wenn man nähmlich die Seite eines ſolchen abgekürzten Kegels AC $= b$ Fig. 36, den mittleren Umkreis MN $= p$ 36
ſetzet, und die Neigung der Seite AC gegen AE parallel zur Achſe des Kegels und zur Richtung des Stromes FG mit φ bezeichnet; ſo iſt für die Geſchwindigkeit $= c$ und

Fig. 36. für das eigenthümliche Gewicht q der anſtoßenden Flüſſigkeit der Stoß gegen die krumme Oberfläche ABDC (mit Ausnahme des Stoßes gegen die ebene Grundfläche) $= bp \cdot \frac{c^2}{4g} \cdot q \cdot \sin^3 \phi$.

Denn wenn man den mittleren Umkreis MN $= p$ in unendlich viele gleiche Theile zertheilet, und von der Spitze F des ergänzten Kegels durch die Theilungspuncte des mittleren Umkreiſes gerade Linien bis an den Umkreis der größeren Grundfläche gedenket; ſo wird dadurch die krumme Oberfläche des abgekürzten Kegels in ihre Elemente aufgelöſet, in gleich große Trapezien von der mittleren Breite $= \frac{p}{\infty}$ und von der Höhe $= b$. Der Inhalt eines ſolchen Trapezium iſt $= \frac{bp}{\infty}$, und deſſen Neigung gegen die Richtung des Stromes und gegen die Achſe des Kegels $=$ CAE $=$ CFG $= \phi$; folglich iſt (vermöge §. 112.) die Preſſung oder der Stoß des mit der Geſchwindigkeit $= c$ fließenden Stromes gegen ein ſolches Element nach der Richtung des Stromes $= \frac{bp}{\infty} \cdot \frac{c^2}{4g} \cdot q \sin^3 \phi$; und die Summe aller ſolcher Preſſungen nach parallelen Richtungen, das iſt, der ſogenannte Stoß gegen die krumme Oberfläche des abgekürzten Kegels nach der Richtung des Stromes iſt alſo $= \infty \cdot \frac{bp}{\infty} \cdot \frac{c^2}{4g} q \cdot \sin^3 \phi = \frac{bpc^2 q \cdot \sin^3 \phi}{4g}$.

§. 117.

Der Stoß eines fließenden Stromes gegen eine feſte Kugel nach der Richtung des Stromes iſt gleich dem Gewichte einer Säule dieſer Flüſſigkeit, welche die größte Kreisfläche der Kugel zur Grundfläche, und die halbe Geſchwindigkeitshöhe des Stromes zu ihrer Länge hat.

Um

Um dieſe Wahrheit einzuſehen ſey AMBM′A Fig. 37 eine feſte Kugel dem Stoße eines nach der Richtung von A nach B fließenden Stromes ausgeſetzet. Der Halbmeſſer der Kugel ſey AC $= a$, die Abſciſſe AP $= x$, und ihr Differenziale Pp $= dx$; ſo iſt das Differenziale der Oberfläche des Kugelabſchnittes MAM′ die Zonne Mmm′M′, welche man für die Oberfläche eines abgekürzten Kegels anſehen kann; und das Differenziale dp des Stoßes p gegen den Kugelabſchnitt MAM′ iſt der Stoß, welchen die Kegelfläche Mmm′M′ nach der Richtung des Stromes AB leidet. Dieſer Stoß dp iſt vermöge §. 116 für die Geſchwindigkeit c und für das eigenthümliche Gewicht q gleich der Kegelfläche Mmm′M′ multipliciret mit $\frac{c^2 q}{4g}$ und mit dem cubirten Sinus des Winkels mMR oder PMC. Fig. 37

Es iſt aber vermöge der Geometrie die Oberfläche Mmm′M′ gleich dem größten Umkreiſe der Kugel $2a\pi$ multipliciret mit Pp, nähmlich $= 2a\pi dx$; und sin mMR

$= \sin PMC = \frac{PC}{MC} = \frac{a-x}{a}$ wegen

$\sin PMC : PC(a-x) = \text{sintot}(1 : MC(a;$

folglich iſt $dp = 2a\pi dx . \frac{c^2 q}{4g} . (\frac{a-x}{a})^3$,

nähmlich $dp = \frac{c^2 \pi q}{2a^2 g} . x^{\circ} dx (a-x)^3$

daraus folget durch die Integration

$p = \text{Const} - \frac{c^2 \pi q (a-x)^4}{8a^2 g}$;

nun iſt $p = 0$ für $x = 0$;

folglich $\text{Const} = \frac{c^2 \pi q}{8a^2 g} . a^4$,

und $p = \frac{c^2 \pi q}{8a^2 g} . [a^4 - (a-x)^4]$.

Fig. Um nun den Stoß gegen die Kugel zu erhalten, muß man $x = a$ ſetzen, weil nur die Hälfte der Kugelfläche dem Stoße ausgeſetzet iſt. Es iſt ſodann der Stoß, welchen die Kugel nach der Richtung des Stromes auszuſtehen hat, $p = \frac{c^2 \pi q}{8a^2 g}.a^4 = \frac{1}{2}a^2\pi.\frac{c^2}{4g}.q =$ dem Gewichte einer Säule von dieſer Flüſſigkeit, welche die größte Kreisfläche $a^2\pi$ der Kugel zur Grundfläche, und die halbe Geſwindigkeitshöhe des Stromes $\frac{1}{2}.\frac{c^2}{4g}$ zur Höhe oder Länge hat.

§. 118.

Setzet man einen geraden Cylinder mit ſeiner Achſe in der Richtung eines Wäſſerſtromes dem Stoße entgegen; ſo iſt der Stoß gegen deſſen Grundfläche $= a^2\pi.\frac{c^2 q}{4g}$ für den Halbmeſſer des Cylinders $= a$, für die Geſchwindigkeit des Stromes $= c$, und für das eigenthümliche Gewicht der Flüſſigkeit $= q$. Iſt aber der dem Stoße ausgeſetzte Cylinder an ſeinem vorderen Ende mit einer Halbkugel des nähmlichen Halbmeſſers $= a$ abgerundet; ſo iſt ſodann (vermöge §. 117.) der Stoß nach der Richtung des Stromes $= \frac{1}{2}.a^2\pi.\frac{c^2 q}{4g}$, nur halb ſo groß, als ehevor. Auch wird der Stoß nur halb ſo groß, wenn man den Cylinder an der Stoßſeite in einen Kegel von der Höhe $= a$ auslaufen läßt.

Die Beſtimmung des Waſſerſtoßes gegen andere krumme Oberflächen, z. B. gegen ein Paraboloides nach der Richtung ſeiner Achſe, gegen einen Cylinder ſenkrecht auf deſſen Achſe, u. ſ. w. wird dem eigenen Fleiße überlaſſen.

§. 119.

Stößt der aus einer Oeffnung eines Gefäßes ausfahrende Waſſerſtrahl nicht weit von der Ausflußöffnung gegen eine demſelben ausgeſetzte Fläche, ſo kommt es darauf an, ob

ob die Stoßfläche kleiner oder größer ſey, als der Querſchnitt Fig.
des zuſammen gezogenen Waſſerſtrahles.

Iſt nun bey einem ſolchen Stoße die Stoßfläche kleiner oder auch eben ſo groß als der Querſchnitt des zuſammen gezogenen Waſſerſtrahles; ſo wird ſowohl der ſenkrechte, als der ſchiefe Stoß ſo berechnet, wie es bisher für kleine Stoßflächen in Strömen von großen Querſchnitten gezeiget worden iſt.

Iſt aber die Stoßfläche beträchtlich größer als der Querſchnitt des zuſammen gezogenen Waſſerſtrahles; ſo verbreitet ſich der anſtoßende Waſſerſtrahl auf der Stoßfläche in einer beträchtlichen Ausdehnung, und vermehret dadurch den Druck gegen dieſelbe ſehr merklich. Wenn die Stoßfläche 16mahl oder darüber größer iſt, als der Querſchnitt des zuſammen gezogenen Waſſerſtrahles; ſo iſt vermöge der Erfahrung in einem ſolchen Falle der ſenkrechte Waſſerſtoß gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule, welche den Querſchnitt des zuſammen gezogenen Waſſerſtrahles zur Grundfläche, und die 2fache Geſchwindigkeitshöhe des anſtoßenden Waſſers zur Höhe hat.

Iſt die Stoßfläche zwar größer als der Querſchnitt des zuſammen gezogenen Waſſerſtrahles, aber doch kleiner als das 16fache dieſes Querſchnittes; ſo iſt die Höhe der Waſſerſäule auf der Grundfläche eines ſolchen Querſchnittes, welche dem ſenkrechten Waſſerſtoße gleich ſeyn ſoll, größer als die einfache, und kleiner als die doppelte Geſchwindigkeitshöhe des anſtoßenden Waſſerſtrahles. Aus dem Verhältniſſe des Querſchnittes zur Stoßfläche läßt ſich in dergleichen Fällen beyläufig beurtheilen, um welchen Bruchtheil man die einfache Geſchwindigkeitshöhe vermehren ſoll, um den Waſſerſtoß einiger Maßen berechnen zu können.

§. 120.

1) Beweget ſich die flüſſige Maſſe eines Stromes mit der Geſchwindigkeit $= C$, und ein dem Stoße ausgeſetzter feſter Körper nach eben derſelben Richtung mit einer kleineren Geſchwindigkeit $= c$: ſo iſt der Stoß ſo groß, als wenn

der

Fig. der feſte Körper unbeweglich wäre, und der Strom mit der Geſchwindigkeit $C - c$ gegen ſolchen ſtieße. Beweget ſich ferner die flüſſige Maſſe eines Stromes mit der Geſchwindigkeit $= C$, ein dem Stoße ausgeſetzter feſter Körper aber nach entgegen geſetzter Richtung mit der Geſchwindigkeit $= c$; ſo iſt auch der Stoß ſo groß; als wenn der feſte Körper unbeweglich wäre, der Strom aber mit der Geſchwindigkeit $= C + c$ auf ſolchen ſtieße.

2) Die Geſchwindigkeit $C \mp c$, nähmlich der Unterſchied bey übereinſtimmenden, und die Summe der Geſchwindigkeiten des Stromes und der Stoßfläche bey entgegen geſetzten Richtungen heißt die relative Geſchwindigkeit des Stromes in Beziehung auf die als unbeweglich angeſehene Stoßfläche. Den Stoß eines fließenden Stromes gegen einen darin bewegten feſten Körper nennt man den relativen Stoß, den Stoß aber gegen einen ruhenden Körper den abſoluten Stoß.

3) Der relative Waſſerſtoß gegen eine auf die Richtung des Stromes ſenkrechte, und in dieſer Lage vor- oder rückwärts bewegte ebene Fläche iſt daher gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule, welche die Stoßfläche zur Grundfläche, und die der relativen Geſchwindigkeit zugehörige Höhe zur Länge hat. Wenn nähmlich die Geſchwindigkeit des Stromes $= C$, die den ſenkrechten Stoß leidende ebene Fläche $= f$, die Geſchwindigkeit dieſer Fläche nach der mit dem Strome übereinſtimmenden oder entgegen geſetzten Richtung $= \mp c$, und das eigenthümliche Gewicht der anſtoßenden Flüſſigkeit $= q$ geſetzet wird; ſo iſt der relative die Fläche ſenkrecht treffende Stoß

$$p = \frac{f(C \mp c)^2 q}{4g}$$

4) Der relative Waſſerſtoß aber gegen eine auf die Richtung des Stromes unter einem gegebenen Neigungswinkel ſchief geſtellte, und in dieſer Lage nach der Richtung des Stromes vor- oder rückwärts beweg-

wegte ebene Fläche iſt nach dieſer Richtung gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule, welche die Stoßfläche zur Grundfläche, und die der relativen Geſchwindigkeit des Stromes zugehörige Höhe zur Länge hat, multipliciret mit dem cubirten Sinus des Neigungswinkels der Stoßfläche gegen die Richtung des Stromes (vermöge §. 112. n. 2) weil auch hier der Stoß eben ſo beſchaffen iſt, als wenn die dem ſchiefen Waſſerſtoße ausgeſetzte Fläche unbeweglich wäre, und der Strom mit der relativen Geſchwindigkeit unter dem gegebenen Neigungswinkel gegen ſolche ſtieße. Für die vorigen Benennungen, und für den Neigungswinkel $= \varphi$ der Stoßfläche gegen die Richtung des Stromes iſt alſo der relative Stoß Fig.

$$p = \frac{f(C \mp c)^2 q \,.\, \sin^3\varphi}{4g}.$$

5) Der relative Waſſerſtoß endlich gegen eine in der Richtung des Stromes vor- oder rückwärts bewegte Kugel iſt gleich dem Gewichte einer Säule der anſtoßenden Flüſſigkeit, welche die größte Kreisfläche der Kugel zur Grundfläche, und die Hälfte der zur relativen Geſchwindigkeit gehörigen Höhe zur Länge hat. Für die vorigen Benennungen und für den Halbmeſſer der Kugel $= a$ iſt daher der relative Waſſerſtoß gegen eine Kugel

$$p = \frac{a^2 \pi (C \mp c)^2 q}{8g}.$$

§. 121.

Der relative Waſſerſtoß in den Gleichungen des vorigen §. 120 nähmlich $\frac{f(C-c)^2 q}{4g}$, $\frac{f(C-c)^2 q . \sin^3\varphi}{4g}$, und $\frac{a^2\pi(C-c)^2 q}{8g}$ wird $= 0$ für $c = C$. Stößt nähmlich der Strom ſenkrecht gegen die Fläche eines hinein gelegten ſchwimmenden Körpers; ſo fängt ſeine Bewegung von der Ruhe an, und wird von dem Stoße des Stromes nach und

nach

Fig. nach ſo lange beſchleuniget, bis der Körper eben ſo ſchnell ausweicht, als das anſtoßende Waſſer nachfolget, das iſt, bis ſeine Geſchwindigkeit der Geſchwindigkeit des Stromes gleich geworden iſt, wo ſodann der ſchwimmende Körper keinen Stoß mehr leidet. Der relative Stoß wird alſo mit dem Zunehmen der Geſchwindigkeit der ausweichenden Stoßfläche immer geringer, und nimmt bis auf Null ab, wo die Geſchwindigkeit der ausweichenden Stoßfläche der Geſchwindigkeit des Stromes gleich iſt, welches in dergleichen Fällen binnen einer ſehr kurzen Zeit geſchieht.

§. 122.

Nun läßt ſich auch die Wirkung des Waſſerſtoßes gegen ein unterſchlächtiges Mühlrad in einem Strome wie z. B. bey den Schiffmühlen erklären. Im Anfange leidet die unterſte noch ruhende Schaufel einen ſenkrechten Stoß ſo groß als das Gewicht einer Waſſerſäule, deren Grundfläche der Schaufelfläche und deren Höhe oder Länge der zur Geſchwindigkeit des Waſſers gehörigen Höhe gleich iſt; einige der übrigen auch ſchon eingetauchten Schaufeln aber leiden zum Theil einen ſchiefen Stoß, der ſich (nach §. 112. n. 1.) berechnen läßt. Kommt nun das Rad in Bewegung; ſo iſt der Stoß gegen die folgenden Schaufeln ſchwächer, weil das Waſſer nur mit ſeiner relativen Geſchwindigkeit darauf wirket. Käme das Rad in einen ſo ſchnellen Umlauf, daß die Schaufeln mit der ganzen Geſchwindigkeit des Waſſers auswichen; ſo würde der Stoß gegen die Schaufeln gänzlich aufhören. Dieſes wäre aber nur möglich, wenn das Rad ohne allen Widerſtand umliefe, und die Maſchine keine Laſt zu bewegen hätte.

Man ſetze den Waſſerſtoß gegen ein unterſchlächtiges Waſſerrad = 150 Pfund. Wäre nun der ſämmtliche Widerſtand der Maſchine auf den Halbmeſſer des Schaufelrades bis zum Mittelpuncte des Stoßes gegen die eingetauchten Schaufeln, als auf einen und denſelben Hebelsarm reduciret, auch = 150 Pfund; ſo könnte die Maſchine gar nicht in Bewegung kommen, ſondern die eingetauchten Schaufeln ſtellten feſte unbewegliche Ebenen vor, gegen welche

der

der Waſſerſtoß ſtäts = 150 Pfund verbliebe, und von dem eben so großen reducirten Widerſtande im Gleichgewichte erhalten würde. Wäre aber bey dem anfänglichen Waſſerſtoße von 150 Pfunden der ſämmtliche reducirte Widerſtand nur 100 Pfund; ſo würde ſich das Rad zu bewegen anfangen, und ſeine Geſchwindigkeit würde ſo lange fortwachſen, bis der relative Stoß als die bewegende Kraft auch 100 Pfund wäre, und dem erwähnten reducirten Widerſtande von 100 Pfund das Gleichgewicht hielte, worauf ſodann das Rad mit gleichförmiger Bewegung umliefe, in ſo lange weder an der bewegenden Kraft noch an dem Widerſtande etwas geändert würde. Dieſer Zuſtand einer Maſchine in gleichförmiger Bewegung, wo die bewegende Kraft den geſammten auf einerley Hebelsarm reducirten Widerſtande gleich iſt, heißt der **Beharrungsſtand der Maſchine.** Fig.

§. 123.

Bedeutet p die **bewegende Kraft**, nähmlich den **relativen Waſſerſtoß**, und c die **Geſchwindigkeit des Mittelpunctes der Schaufeln des Waſſerrades im Beharrungsſtande einer Maſchine**; ſo wird der **Effect** oder die **geleiſtete Wirkung der Maſchine** aus dem **Producte** pc **ermeſſen.**

Der Effect iſt nähmlich deſto größer, je größer die von der Maſchine in Bewegung geſetzte Laſt iſt, und je geſchwinder dieſe Laſt beweget wird; und wird daher aus dem Producte dieſer Laſt multipliciret mit ihrer Geſchwindigkeit ermeſſen. Es iſt aber im Beharrungsſtande einer durch ein unterſchlächtiges Waſſerrad getriebenen Maſchine die bewegte Laſt oder der auf einen dem Halbmeſſer des Waſſerrades gleichen Hebelsarm reducirte Widerſtand eben ſo groß als der relative Waſſerſtoß p gegen die Radſchaufeln; und die Geſchwindigkeit dieſer reducirten Laſt iſt auch ſo groß, als die Umlaufsgeſchwindigkeit c des Waſſerrades; folglich wird der Effect einer ſolchen Maſchine auch aus dem Producte pc des relativen Waſſerſtoßes multipliciret mit der Umlaufsgeſchwindigkeit der Radſchaufeln ermeſſen.

§. 124.

Fig.

§. 124.

Iſt nun C die abſolute Geſchwindigkeit des Waſſers, f die dem Waſſerſtoße ausgeſetzte Schaufelfläche eines unterſchlächtigen Waſſerrades, c ihre Umlaufsgeſchwindigkeit kleiner als C, P der abſolute Waſſerſtoß des mit der Geſchwindigkeit $= C$ anſchlagenden Waſſers gegen eine unbewegliche Stoßfläche $= f$, und p der relative Stoß gegen eben dieſelbe mit der Geſchwindigkeit $= c$ ausweichende Stoßfläche, das eigenthümliche Gewicht des anſtoßenden Waſſers aber $= q$;

ſo iſt $P = \frac{fC^2 q}{4g}$ wegen §. 109.

und $p = \frac{f(C-c)^2 . q}{4g} = \frac{fC^2 q}{4g} . (1 - \frac{c}{C})^2$ wegen §. 120 n. 3.

folglich auch $p = P . (1 - \frac{c}{C})^2$;

und der Effect $E = Pc\,(1 - \frac{c}{C})^2$ wegen §. 123.

Dieſer Effect $Pc\,(1 - \frac{c}{C})^2$ iſt $= 0$ ſowohl für $c = 0$, als auch für $c = C$, das iſt, ſowohl wenn der ſämmtliche Widerſtand der Maſchine ſo groß iſt als der abſolute Waſſerſtoß, da die Maſchine ſich gar nicht beweget, und alſo keine Wirkung leiſtet; als auch wenn die Radſchaufeln eben ſo geſchwinde umlaufen als das Waſſer ſich gegen ſolche beweget, da das Rad keinen Widerſtand zu überwältigen hat, und daher auch keine Wirkung leiſtet. Für alle übrige Werthe von $c = 0$ bis $c = C$ hat das Product $Pc\,(1 - \frac{c}{C})^2$ einen Werth, das iſt, die Maſchine hat einen Effect, der für einen gewiſſen Werth c ein Größtes wird. Für dieſen Werth von c iſt

$$d[Pc\,(1 - \frac{c}{C})^2] = Pdc\,(1 - \frac{c}{C})^2 - \frac{2\,Pcdc}{C} . (1 - \frac{c}{C}) = 0$$

folglich $c = \frac{1}{3} C$;

nähm-

nähmlich damit der Effect einer ſolchen Maſchine mit einem unterſchlächtigen Waſſerrade ein größtes wird, muß die Geſchwindigkeit der Radſchaufeln $= \frac{1}{3}$ der abſoluten Geſchwindigkeit des anſtoßenden Waſſers ſeyn; und daher iſt in dieſem Falle die relative Geſchwindigkeit des anſtoßenden Waſſers $= \frac{2}{3}$ der abſoluten, der relative Stoß $= \frac{4}{9}$ des abſoluten, und der Effect $= \frac{4}{27}$ des Effectes vom abſoluten Waſſerſtoße. Fig.

Will man nun nach dieſer Lehre die vortheilhafteſte Umlaufszahl $= n$ binnen einer Minute bey einem unterſchlächtigen Waſſerrade in einem offenen Strome beſtimmen, damit die Maſchine die größte Wirkung leiſte; ſo ſey der Halbmeſſer des Rades $= a$ bis zum Mittel- oder Stoßpuncte der Schaufeln, alſo der Umkreis $= 2a\pi$; die Geſchwindigkeit des Rades, das iſt, der in 1 Sec. gleichförmig zurückgelegte Weg ſoll ſeyn $= \frac{1}{3}C$, wenn C die Geſchwindigkeit des anſtoßenden Waſſers iſt; der in einer Minute zurückgelegte Weg des Rades ſoll alſo ſeyn $= 60 \times \frac{1}{3}C = 20C$; folglich iſt $2a\pi . n = 20C$, und $n = \frac{10C}{a\pi}$.

§. 125.

Um den Waſſerſtoß gegen ein unterſchlächtiges Rad in einem offenen Fluße zu berechnen muß man unter der Schaufelfläche $= f$ des vorigen §. nicht bloß allein die Fläche der unterſten Schaufel verſtehen, ſondern man muß meines Erachtens zu dem ſenkrechten Waſſerſtoße gegen die unterſte Schaufel auch noch die ſchiefen Preſſungen hinzuſetzen, welche die Flächenſtücke der übrigen eingetauchten Schaufeln nach darauf ſenkrechten Richtungen von dem anſtoßenden Waſſer leiden. Dieſe Preſſungen zuſammen genommen ſind die bewegende Kraft, womit ein ſolches Waſſerrad ſammt der damit verbundenen Laſt beweget wird. Eine feſte Fläche, welche für ſich allein als die unterſte Radſchaufel in lothrechter Lage bey eben derſelben Geſchwindigkeit einen eben ſo großen Waſſerſtoß litte, wäre der Werth für f im vorigen §. Nach dieſer Bemerkung kann man aus den gegebe-

Fig. gebenen Abmeſſungen eines unterſchlächtigen Waſſerrades, und aus der bekannten Lage der eingetauchten Radſchaufeln für die gegebenen Geſchwindigkeiten C und c den relativen Waſſerſtoß berechnen, und ſolchen mit angeſtellten Verſuchen vergleichen, wo es ſich näher zeigen wird, um wie viel und wie man den ſenkrechten Waſſerſtoß gegen die unterſte Schaufel wegen der ſchiefen Preſſungen gegen die übrigen Flächenſtücke der zugleich eingetauchten Schaufeln vermehren ſoll.

§. 126.

Die Berechnung der Bewegenden Kraft, oder des relativen Waſſerſtoßes bey einem unterſchlächtigen Waſſerrade in einem gewöhnlichen Mühlgerinne, wo der Querſchnitt des anſtoßenden Waſſers beynahe eben ſo groß iſt, als die Fläche einer Radſchaufel, iſt noch größeren Schwierigkeiten unterworfen, weil da nicht wie bey Schiffmühlen das anſchlagende Waſſer frey abfließen kann, ſondern ſolches hier nebſt dem hydrauliſchen Stoße durch den Aufenthalt zwiſchen den Radſchaufeln auch dabey einen hydroſtatiſchen Druck ausübet.

Inzwiſchen wird gewöhnlich (vermöge §. 110.) in der Ausübung folgende Regel beobachtet.

Die bewegende Kraft oder der Waſſerſtoß bey einem unterſchlächtigen Rade in einem Mühlgerinne iſt gleich einer Waſſerſäule, welche die ſenkrecht angeſtoßene Schaufelfläche zur Grundfläche und die der relativen Geſchwindigkeit des anſtoßenden Waſſers zugehörige Höhe doppelt genommen zu ihrer Länge hat. Wenn die Radſchaufeln ſo weit von einander ſtehen, daß bey dem ſenkrechten Waſſerſtoße gegen eine Schaufel die nächſt folgende ſich eben einzutauchen anfängt; ſo dürfte dieſe Regel hinlänglich richtig ſeyn. Wenn hingegen die Radſchaufeln etwas näher beyſammen ſtehen, und das Gerinne in der Gegend des anſtoßenden Waſſers kreisförmig abgerundet iſt, wodurch das Waſſer gegen mehrere Schaufeln zugleich beynahe ſenkrecht nur mit verſchiedenen Geſchwindigkeiten anſchlägt; ſo iſt der relative Waſſerſtoß noch größer.

Bey der vortheilhafteſten Einrichtung eines ſolchen unter- ſchlächtigen Waſſerrades dürfte die den relativen Waſſerſtoß vorſtellende Waſſerſäule auf der Grundfläche einer Radſchau- fel die dreyfache Höhe der relativen Geſchwindigkeit zur Länge haben. Auch will man aus mehreren Verſuchen wahr- genommen haben, daß Mühlen und andere Maſchinen mit dergleichen unterſchlächtigen Waſſerrädern in Gerinnen da- mahls den größten Effect leiſten; wenn die Geſchwindigkeit des Mittelpunctes oder eigentlich des Stoßpunctes der Rad- ſchaufeln beynahe die Hälfte der Geſchwindigkeit des Waſ- ſers beträgt, und nicht genau $\frac{1}{3}$, wie es oben im §. 124. gezeiget worden iſt. Fig.

Die Berechnung des Waſſerſtoßes gegen ganz und halb oberſchlächtige, ſo wie auch gegen horizontale Waſſerräder wird hier mit Stillſchweigen übergangen, und kann in an- deren ausführlicheren Abhandlungen über dieſen Gegenſtand nachgeſchlagen werden. Als ein Handbuch kann hierzu die- nen, Hrn Mönichs Anleitung zur Berechnung und An- ordnung der gebräuchlichſten Maſchinen. Augsburg 1779, wo man auch die nöthigſten weiteren Nachweiſungen findet. Inzwiſchen iſt es aus dem bereis Vorgetragenen begreiflich, daß das ſtatiſche Moment der bewegenden Kraft bey einem oberſchlächtigen Waſſerrade der Summe der ein- zelnen Momente gleich iſt, die man erhält, wenn man das Gewicht des in jeder Sackſchaufel enthaltenen Waſſers mit dem Abſtande ſeines Schwerpunctes, oder beyläufigen Mit- telpunctes von dem lothrechten Durchmeſſer multipliciret.

§. 127.

Daß der relative Waſſerſtoß $= p$ in einem großen Strome gegen eine kleine ebene Fläche $= f$ in ſenkrechter Rich- tung für das eigenthümliche Gewicht des Waſſers $= q$, für die Geſchwindigkeit des fließenden Waſſers $= C$, und für die Geſchwindigkeit der ausweichenden Fläche $= c$ nach §. 120 durch die Gleichung,

$$\text{I. } p = \frac{fq}{4g} . (C-c)^2$$

rich-

Fig. richtig ausgedruckt ſey, ſollte doch keinem Zweifel unterworfen ſeyn, vorausgeſetzt, daß in einem ſolchen Falle der abſolute Waſſerſtoß (nach §. 109.) durch das Gewicht der Waſſerſäule $f.\frac{C^2}{4g}.q$ richtig ausgedrucket iſt; wie auch, daß in denjenigen Fällen, wenn (nach §. 110 und 119.) der abſolute Waſſerſtoß $=\frac{fC^2q}{2g}$ iſt, nähmlich wenn die denſelben vorſtellende Waſſerſäule die 2fache Geſchwindigkeitshöhe zu ihrer Länge hat, der relative Waſſerſtoß durch folgende Gleichung richtig ausgedruckt ſey

$$\text{II. } p=\frac{fq}{2g}.(C-c)^2.$$

Die Richtigkeit der angeführten Gleichungen für den relativen Waſſerſtoß beruhet auf der Behauptung, daß der Stoß gegen eine auf die Richtung des Stromes ſenkrecht geſtellte und nach dieſer Richtung ausweichende Stoßfläche eben ſo groß iſt, als wenn die Stoßfläche in ihrer Lage als ruhend befeſtiget wäre, und der Strom nur mit der relativen Geſchwindigkeit gegen ſolche fließe. Um dieſe Behauptung deutlicher einzuſehen, ſey eine Fläche $=f$ in einem Strome dem ſenkrechten Waſſerſtoße ausgeſetzet, und ſo befeſtiget, daß ihre Lage durch den Waſſerſtoß nicht geändert wird; ſo iſt für die Geſchwindigkeit $= v$ des Stromes der Waſſerſtoß $=\frac{fv^2q}{4g}$. Nun gedenke man, der ganze Stromcanal ſammt der darin befeſtigten Stoßfläche bewege ſich nach der Richtung des Stromes mit der Geſchwindigkeit $= c$; ſo verbleibt bey einer ſolchen Bewegung der Waſſerſtoß gegen die Fläche f eben ſo groß, wie ehevor, nähmlich $=f.\frac{v^2}{4g}q$. Es iſt aber ſodann die abſolute Geſchwindigkeit des anſtoßenden Waſſers $= v + c$, und die Geſchwindigkeit der nach eben dieſer Richtung mit dem Canale fortgehenden Stoßfläche $= c$, und daher die relative Geſchwin-

ſchwindigkeit des anſtoßenden Waſſers $= (v+c) - c = v$. Fig.
Folglich iſt in einem ſolchen Falle der Waſſerſtoß $f . \frac{v^2}{4g} . q =$
$f . \frac{[(v+c)-c]^2}{4g} . q$ gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule, welche die Stoßfläche zur Grundfläche, und die der relativen Geſchwindigkeit zugehörige Höhe zur Länge hat. Auf eben dieſe Art kann man die Richtigkeit der Formel II. für ſolche Fälle bekräftigen, in welchen zur Beſtimmung des Waſſerſtoßes die Geſchwindigkeitshöhe doppelt zu nehmen iſt.

§. 128.

In neueren Zeiten haben einige Schriftſteller die angeführten Ausdrücke für den relativen Waſſerſtoß
$I. p = \frac{fq}{4g} . (C-c)^2$, und $II. p = \frac{fq}{2g} . (C-c)^2$ §. 127.
für unrichtig erkläret, dafür andere Gleichungen aufgeſtellet, und daraus die zum größten Effect eines unterſchlächtigen Waſſerrades erforderliche Geſchwindigkeit anders gefunden, als es im §. 124 erwieſen worden iſt. Z. B. Hr. Gerlach, Profeſſor der mechaniſchen Wiſſenſchaften in der k. k. Ingenieur-Accademie zu Wien behauptet in ſeinem Lehrbuche Anfangsgründe der Mechanik zum Gebrauche der k. k. Ingenieursſchule, Wien bey Trattnern 1786. 2r. Th. § 811 bis 822 der relative Waſſerſtoß ſey in jedem Falle ſowohl in einem weiten Strome als auch in einem Mühlgerinne

$$p = \frac{fq}{4g} (C^2 - c^2)$$

nähmlich ſo groß als das Gewicht einer Waſſerſäule, welche die ausweichende Stoßfläche $= f$ zur Grundfläche, und die Differenz der zwey Geſchwindigkeitshöhen $\frac{C^2}{4g} - \frac{c^2}{4g}$ zur Höhe hat. Für $c = \frac{99}{100} C$ wäre alſo der relative Waſſerſtoß nach dieſer Gerlachiſchen Formel 199mahl größer als nach der ſonſt zu derſelben Abſicht gebrauchten Gleichung I. in §. 127.

Fig. §. 127. Zur Berechnung des Waſſerſtoßes bey einem unterſchlächtigen Rade nimmt Hr. Gerlach jederzeit nur die Fläche einer einzigen ſenkrecht getroffenen Radſchaufel für f in der angeführten Formel, und findet auf dieſe Art ſeine Formel mit den Verſuchen ſehr übereinſtimmend, die Gleichung I. in §. 127. aber, die man die Parentiſche Formel nennt, davon ſehr abweichend. Nach den Erinnerungen im §. 125 und 126 werden jedoch dergleichen Abweichungen vermieden. Uebrigens ſetzet Hr. Gerlach in allen Fällen den abſoluten Waſſerſtoß dem Gewichte einer Waſſerſäule gleich, welche den Querſchnitt des anſtoßenden Waſſerſtrahles zur Grundfläche, und die einfache Geſchwindigkeitshöhe zur Länge hat; da es doch durch Verſuche ausgemacht iſt, daß in einigen Fällen dieſe Geſchwindigkeitshöhe doppelt genommen werden muß.

Herr Gerſtner, Profeſſor der höheren Mathematik an der Univerſität zu Prag in ſeiner Theorie des Waſſerſtoßes in Schußgerinnen (der neueren Abhandlungen der königl. Böhm. Geſellſch. der Wiſſenſch. 2. Bd. Prag 1795 XIV. Abhandl.) findet durch ſeine Unterſuchung für den relativen Waſſerſtoß gegen ein unterſchlächtiges Rad in einem Mühlgerinne bey denſelben Benennungen folgende Gleichung

$$p = \frac{fq}{2g} \cdot C(C-c).$$

Für $c = \frac{99}{100} C$ wäre daher der relative Waſſerſtoß nach dieſer Formel 200mahl größer als nach der Formel I. im §. 127. und noch immer hundertmahl größer als nach der Formel II. in eben dem §. 127.

Die Gerſtneriſche Formel hat eigentlich die Geſtalt $p = M.\frac{C-c}{2g}$, wo $M = fCq$ iſt, und das Gewicht des in einer Secunde durch das Gerinne des Querſchnittes $= f$ mit der Geſchwindigkeit $= C$ fließenden, und an die Radſchaufel des Inhaltes $= f$ anſchlagenden Waſſers von dem eigenthümlichen Gewichte $= q$ bedeutet.

Dieſe

Dieſe Formel für den relativen Waſſerſtoß, welche auch Hr. Rosmann in dem oben §. 87 angemerkten Lehrbuche der Hydraulik angenommen hat, iſt auf die Vorausſetzung gegründet, daß bey dem relativen Waſſerſtoße binnen einer Secunde eben ſo viel Waſſer an die Stoßfläche anſchlage, als bey dem abſoluten; oder daß die anſtoßende Waſſermenge ungeändert verbleibe, die Geſchwindigkeit der ausweichenden Stoßfläche möge wie immer geändert werden. Allein eine ſolche Vorausſetzung iſt unrichtig. Denn es iſt ja eine ausgemachte Wahrheit, daß um ſo weniger Waſſer binnen einer Secunde an die bewegliche Stoßfläche anſchlägt, je mehr ſich die Geſchwindigkeit c der ausweichenden Stoßfläche der Geſchwindigkeit C des anſchlagenden Waſſers nähert, ſo daß für $c = C$ gar kein Waſſer mehr anſchlägt; für jeden beſtimmten Werth von c aber iſt die in einer Secunde an die Stoßfläche $= f$ anſchlagende Waſſermenge $M = f(C-c)$, und nicht $= fC$. Fig.

Hr. Langsdorf hat im §. 107 ſeines Lehrbuches der Hydraulik für den relativen Waſſerſtoß folgende Formel in Vorſchlag gebracht, welche auch Hr. Rosmann im §. 228 ſeines Lehrbuches anführet,

$$p = fq.[A - a + \frac{(C-c)^2}{4g}]$$

wo nebſt den übrigen bekannten Benennungen A die Geſchwindigkeitshöhe des anſchlagenden Waſſers, und a die Geſchwindigkeitshöhe der ausweichenden Stoßfläche bedeutet; es iſt nähmlich $A = \frac{C^2}{4g}$, und $a = \frac{c^2}{4g}$. Setzet man dieſe Werthe für A und a in die Langsdorfiſche Formel; ſo hat ſie mit der angeführten Gerſtneriſchen eben denſelben Werth

$$p = \frac{fq}{2g}.C(C-c)$$

und iſt daher eben denſelben Einwendungen ausgeſetzet.

Fig. §. 129.

Aufgabe.

Die Geſchwindigkeit des Waſſers in einem Strome auszumeſſen.

Auflöſung.

1. Mittelſt einer ſchwimmenden Kugel. Auf die Oberfläche des Waſſers beynahe in der Mitte der Stromweite in einer Gegend, wo das Waſſer in geradliniger Richtung mit gleichförmiger Bewegung fortfließt, lege man eine hohle Kugel von Meſſingblech, mit ſoviel Waſſer gefüllet und gut verſchraubet oder mit Siegellack vermacht, daß von der ſchwimmenden Kugel nur ſehr wenig aus der Waſſerfläche hervorrage, und daß dieſelbe von einem mäßigen Winde in ihrer Bewegung nicht merklich geſtöret werde. Sodann bemerke man die Zeit an einer guten Secunden-Taſchenuhr, binnen welcher die ſchwimmende Kugel, nachdem ſie die Geſchwindigkeit des Waſſers bereits angenommen hat, eine ehevor ausgeſteckte, und gemeſſene Länge der geradlinigen Stromrichtung zurückleget. Dieſe Zeit kann auch mittelſt eines für halbe Secunden eingerichteten Pendels beobachtet werden. Dividiret man nun die gemeſſene Länge des zurückgelegten Weges mit der dazu gehörigen in Secunden ausgedruckten Dauerzeit; ſo iſt (wegen 3. Th. §. 25.) der Quotient die geſuchte Geſchwindigkeit des Stromes an der Oberfläche in derjenigen Richtung, in der ſich die ſchwimmende Kugel mit dem fortfließenden Waſſer fortbewegte.

Wenn man ſolche Ausmeſſungen ſowohl in der Mitte, als auch nahe an den Ufern vornimmt; ſo findet man, daß der Strom in einem und demſelben Querſchnitte nicht überall dieſelbe Geſchwindigkeit hat.

Verbindet man ferners zwey Kugeln mittelſt eines Fadens unter einander dergeſtalt, daß eine bis zu einer beliebigen Tiefe unter die Waſſerfläche hinabſinket, die andere

aber

aber nur etwas weniges hervorraget; ſo findet man, daß die Fig.
untere Kugel gemeiniglich etwas zurückbleibt, und daß daher die Geſchwindigkeit des Waſſers in der Tiefe kleiner iſt, als an der Oberfläche des Stromes.

II. Mittelſt des Pitotiſchen Strommeſſers. Der von Pitot angegebene Strom-Geſchwindigkeitsmeſſer beſteht aus einer offenen an einem abgetheilten Stabe befeſtigten gläſernen Röhre ABC Fig. 38 mit einem kurzen ſeitwärts gebogenen trichter- oder kegelförmigen Schenkel BC. 38
Man ſenkt einen ſolchen Strommeſſer in das fließende Waſſer dergeſtalt in eine beliebige Tiefe, daß BA beyläufig ſenkrecht auf die Oberfläche des fließenden Waſſers, und daher die zu BA parallele Oeffnungsfläche CF der Richtung des Stromes ſenkrecht ausgeſetzt ſey.

Iſt nun D im Waſſerſpiegel: ſo treibt der hydroſtatiſche Druck das Waſſer nur bis D, der hydrauliſche Waſſerſtoß aber weiter bis E, wo es nicht eher ruhig bleibt, als bis das in der Röhre befindliche Waſſer gegen die Oeffnungsfläche CF eben ſo ſtark nach außen drückt, als jene vereinigte Kraft nach innen.

Nun ſey die Oeffnungsfläche CF $= f$, die Höhe BD $= b$, und DE $= a$; ſo iſt der hydroſtatiſche Druck des äußeren Waſſers gegen die Oeffnungsfläche CF (wegen §. 15.) $= fbq$ für das eigenthümliche Gewicht des Waſſers $= q$; und der hydrauliſche Stoß gegen eben dieſe Oeffnungsfläche für die geſuchte Geſchwindigkeit c des anſtoßenden Waſſerſtrahles iſt (wegen §. 109) $= \frac{fc^2 q}{4g}$; folglich iſt der geſammte Druck gegen CF nach innen $= (b + \frac{c^2}{4g})fq$; der Gegendruck aber des in der Röhre befindlichen Waſſers gegen dieſelbe Oeffnungsfläche FC nach außen iſt (wegen §. 15.) $= f(b+a)q$; und es iſt wegen des Gleichgewichtes $(b + \frac{c^2}{4g})fq =$

 $f(b+a)q$;

Fig. 38 $f(b+a)q$; folglich iſt $\frac{c^2}{4g} = a$, und $c = \sqrt{4ga}$, nähmlich es iſt $c = \sqrt{4g \cdot DE}$, oder $\frac{c^2}{4g} = DE$.

Die beobachtete Höhe der Waſſerſäule in dem Pitotiſchen Strommeſſer ober dem Waſſerſpiegel iſt alſo die Geſchwindigkeitshöhe des Waſſers im Strome an derjenigen Stelle, wo die trichterförmige Oeffnung dem ſenkrechten Waſſerſtoße ausgeſetzet iſt; und die geſuchte Geſchwindigkeit wird erhalten, wenn man aus dem 4fachen Producte der erwähnten Höhe der Waſſerſäule multipliciret mit der bekannten Beſchleunigung der Schwere die Quadratwurzel auszieht.

Um dieſe Rechnung abzukürzen kann man eine Tabelle verfaſſen, welche für verſchiedene Höhen der Waſſerſäulen die dazu gehörigen Geſchwindigkeiten enthält.

Wenn die Oberfläche des fließenden Waſſers nicht für beynahe horizontal angeſehen werden kann, ſondern gegen den Horizont um einen gegebenen Winkel geneigt iſt, wie in den Mühlgerinnen der unterſchlächtigen Räder; ſo muß man die beobachtete auf die Oberfläche des fließenden Waſſers ſenkrechte Länge der Waſſerſäule in dem Pitotiſchen Strommeſſer mit dem Coſinus eines ſolchen Neigungswinkels multipliciren, um die lothrechte Höhe der Waſſerſäule zu erhalten, welche der geſuchten Geſchwindigkeitshöhe gleich iſt.

Als Geſchwindigkeitsmeſſer iſt das erwähnte Pitotiſche Inſtrument weit vorzüglicher, als die ſchwimmende Kugel, da man mit demſelben in jeder beliebigen Stelle ſowohl in einem Strome als auch in einem Mühlgerinne die Geſchwindigkeit des Waſſers beſtimmen kann.

Bey der Beſtimmung der Geſchwindigkeit eines Stromes an der Oberfläche können die zwey erwähnten Arten der Ausmeſſung, mittelſt der ſchwimmenden Kugel und mittelſt des Pitotiſchen Strommeſſers, einander wechſelweiſe zur Beſtätigung dienen.

Da

Da man mit dem Pitotiſchen Strommeſſer die Ge- Fig.
ſchwindigkeiten in verſchiedenen Tiefen einer und derſelben Vertical-Linie beobachtete; ſo hat man aus mehreren Verſuchen gefunden, daß die Differenzen, um welche die Geſchwindigkeiten eines Stromes (in einer ſolchen Strecke ſeines Bettes, wo die Bodenfläche mit der Oberfläche des fließenden Waſſers beynahe parallel läuft) in verſchiedenen Tiefen abnehmen, dieſen Tiefen beynahe proportional ſind. Aus zwey beobachteten Geſchwindigkeiten und aus den dazu gehörigen Tiefen in einer und derſelben Vertical-Linie läßt ſich demnach in jeder anderen Tiefe in eben dieſer Vertical-Linie die Geſchwindigkeit des Stromes berechnen.

III. Mittelſt des Strom-Quadranten. An dem Mittelpuncte C eines Quadranten ACB Fig. 39 ſey ein 39
feiner Faden CP befeſtiget, an dem eine Kugel P etwas ſchwerer als Waſſer frey herabhängt. Senkt man dieſe ins Waſſer, daß die Fläche des Quadranten mit der Richtung des Stromes parallel, und CA vertical ſey; ſo wird ſie vom Strome nach einer beynahe horizontalen Richtung PQ getrieben, und der Faden wird mit der verticalen Linie CA einen gewiſſen Winkel ACP machen, den man beobachten kann. Iſt nun alles in Ruhe; ſo halten ſich drey Kräfte das Gleichgewicht, nähmlich das Gewicht der Kugel im Waſſer PR, der Waſſerſtoß gegen die Kugel PQ, und die Feſtigkeit des Fadens PS. Aus PR läßt ſich PQ beſtimmen; es iſt nähmlich PQ = PR. Tang RPS = PR. Tang ACP. Nun iſt PR als das Gewicht der Kugel im Waſſer (wenn deren Halbmeſſer = a iſt, und deren Dichtigkeit gegen Waſſer ſich verhält wie n: 1) = $\frac{4}{3}a^3\pi(n-1)q$ für das eigenthümliche Gewicht des Waſſers q (wegen §. 23.). Folglich iſt PQ = $\frac{4}{3}a^3\pi(n-1)q$. Tang ACP. Ferner iſt auch PQ als der Waſſerſtoß gegen die Kugel, wenn die geſuchte Geſchwindigkeit des anſtoßenden Waſſers = c geſetzet wird, (vermöge §. 117.)

$= a^2\pi.\frac{c^2}{8g}.q$; es iſt alſo $\frac{4}{3}a^3\pi(n-1)q$. Tang ACP

=

Fig. 39 $= \frac{e^2 \pi c^2 q}{8g}$; und endlich die geſuchte Formel

$$c = \sqrt{[{}^{3}_{3}{}^{2}(n-1)ag.\text{Tang ACP}]}$$

wodurch man nun aus den bekannten Größen a, g, n, Tang ACP die Geſchwindigkeit c berechnen kann.

Iſt einmahl die zu einem beobachteten Abweichungs-winkel zugehörige Geſchwindigkeit bekannt; ſo kann man für jeden anderen Abweichungswinkel eben desſelben Strom-Quadranten die zugehörige Geſchwindigkeit durch den Satz berechnen, daß die Quadrate der Geſchwindigkeiten ſich verhalten, wie die Tangenten der Abweichungswinkel. Hierüber kann man wieder ſehr leicht eine kleine Tabelle verfaſſen, um aus dem beobachteten Abweichungswinkel die Geſchwindigkeit zu finden.

Weil übrigens der Faden des Strom-Quadranten biegſam iſt, und der eingetauchte Theil desſelben mit der übrigen Länge des Fadens außerhalb des Waſſers nicht genau in einer und derſelben geraden Linie liegt; ſo kann man mit dem Strom-Quadranten die Geſchwindigkeiten der Ströme beſonders in beträchtlichen Tiefen nicht mit derſelben Zuverläſſigkeit beſtimmen, wie mit dem Pitotiſchen Strommeſſer.

Anmerk. Eine vollſtändige Anweiſung die Geſchwindigkeiten des fließenden Waſſers auf verſchiedene Arten zu meſſen, findet man in Hr. Brunigs Abhandlung über die Geſchwindigkeiten des fließenden Waſſers, und von den Mitteln dieſelbe auf allen Tiefen zu beſtimmen. Aus dem Holländ. überſetzt von Krönke. Frankfurt am Mayn, bey Behrns 1798 in 4.

§. 130.

Soll nun die Waſſermenge berechnet werden, welche in einem Strome durch einen beſtimmten auf die Stromrichtung ſenkrechten Querſchnitt ſeines Bettes in jeder Secunde durchfließt; ſo muß man zu erſt einen ſolchen Querſchnitt genau aufnehmen, und in einer richtigen Zeichnung durch einige horizontale und verticale Linien in mehrere, theils gleiche

gleiche theils ungleiche Flächenſtücke zertheilen. Sodann Fig. muß man für den beyläufigen Mittelpunct oder Schwerpunct eines jeden ſolchen Flächenſtückes des Querſchnittes die dazu gehörige Geſchwindigkeit nach §. 129. II. beſtimmen. Endlich multipliciret man jeden ſolchen Theil des Querſchnittes mit der dazu gehörigen Geſchwindigkeit, und addiret alle dieſe Producte zuſammen; ſo erhält man den kubiſchen Inhalt der in jeder Secunde durch einen ſolchen Querſchnitt durchſtrömenden Waſſermenge. Wenn man ſodann dieſe Waſſermenge durch den Querſchnitt dividiret; ſo iſt der Quotient die mittlere Geſchwindigkeit des Stromes an derjenigen Stelle, wo man den Querſchnitt aufgenommen hat.

§. 131.

Weitere Unterſuchungen über die Bewegung des Waſſers in natürlichen Flüſſen und in künſtlichen Canälen hier anzuführen iſt nicht meine Abſicht. Die nothwendigſten Gründe dieſer Lehre, ſo wie auch von der Bewegung des Waſſers in Röhrenleitungen mit vielen practiſchen Anwendungen findet man in dem ſchon angeführten Lehrbuche der Hydraulik des Hrn. Rosman. Berlin 1797.

In dieſem Buche findet man auch nachſtehende Gleichung, welche den Zuſammenhang zwiſchen der mittleren Geſchwindigkeit eines Fluſſes, oder eines Canals, zwiſchen ſeinem Gefälle, ſeinem Querſchnitte, und des letzteren Umfange bey gleichförmiger Bewegung ſeines Gewäſſers darſtellet, $c = 90{,}9\sqrt{\left(\frac{f}{p} \cdot \frac{\alpha}{\beta}\right)}$, wo die Buchſtaben folgende Bedeutungen haben, und im Rheinländiſchen Fußmaße ausgedrucket werden müſſen.

c die mittlere Geſchwindigkeit

f der Flächeninhalt des Querſchnittes,

p der Umfang des Querſchnittes, nähmlich die Summe der unteren Breite und der beyden Seitenlinien: oder, welches bey regelmäßigen trapezförmigen Querſchnitten einerley iſt, die Summe der mittleren Breite und der doppelten Tiefe des Waſſers.

Fig. α das Gefälle, und
β die zu dieſem Gefälle gehörige Weite,
m die in 1 Sec. abfließende Waſſermenge.

Soll man alles im Wiener-Fußmaße ausdrucken, ſo kann man, da der Wiener-Fuß nur um etwas weniges größer iſt, als der Rheinländiſche (es ſind 13913 W. F. = 14013 Rh. F.) die angeführte Gleichung ohne merklichen Fehler auch ſo ſchreiben:

die mittlere Geſchwindigkeit

$$c = 90\sqrt{\left(\frac{f}{p}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)} \text{ Wien. Fuß}$$

und die Waſſermenge

$$m = 90f\sqrt{\left(\frac{f}{p}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)} \text{ Wien. Kubik-Fuß}$$

für einen regelmäßigen Fluß oder für einen Canal im Beharrungsſtande.

Nach der letzten Formel läßt ſich folgende practiſche Aufgabe auflöſen, die bey der Anlegung ſchiffbarer Canäle vorkommen kann.

Wie groß muß das Gefälle α eines Canales auf eine gegebene Weite $\beta = 6000$ Wien. F. ſeyn, damit in demſelben bey einer mittleren Breite $b = 24$ Wien. F. das mit gleichförmiger Bewegung fortfließende Waſſer überall eine gegebene Tiefe $a = 5$ W. F. beybehalte, wenn der beſtändige Waſſerzufluß nach Abſchlag der Durchſeigerung und Verdünſtung $m = 200$ W. Kub. Fuß beträgt, das iſt, wenn die in jeder Secunde durch den Querſchnitt des Inhaltes $f = ab = 120$ und des Umfanges $p = b + 2a = 34$ fließende Waſſermenge $m = 200$ bekannt iſt.

Das geſuchte Gefälle iſt vermöge der letzten Gleichung

$$\alpha = \frac{(2a+b)m^2\beta}{8100a^3b^3} = \frac{34.40000.6000}{8100.1728000} = \frac{425}{729} \text{ W. F.}$$
$$= 7\tfrac{1}{7} \text{ Zoll.}$$

Da

Da übrigens in dem angenommenen Falle durch den Fig. Querſchnitt von 120 Quadratfuß in jeder Secunde eine Waſſermenge von 200 Kubikfuß durchfließt; ſo iſt die Geſchwindigkeit des Waſſers in einem ſolchen Canale $= \frac{200}{120}$ $= 1\frac{2}{3}$ Fuß, und das Waſſer legt in einer Stunde einen Weg von 1000 Klaftern zurück.

Wenn man aus der letzten Formel den Werth von b ſuchet, ſo erhält man eine cubiſche Gleichung, wodurch ſich folgende Aufgabe auflöſen läßt.

Ein Canal ſoll in jeder Secunde 200 Kubikfuß Waſſer abführen, und auf die Weite von 100 Klafter ein Gefälle von 2 Zoll haben; dabey ſoll das mit gleichförmiger Bewegung im Canale fortfließende Waſſer in jedem Querſchnitte die Tiefe von 4 Fuß beybehalten; wie groß muß deſſen Mittelbreite ſeyn? und mit welcher Geſchwindigkeit wird ſodann das Waſſer bey einer ſolchen Breite im Canale fortfließen?

Hr. Baader gibt in ſeinem im §. 94 genannten Werke Seite 43 §. 42. folgende ſehr einfache Gleichung für die Geſchwindigkeit v des Waſſers an der Ausflußmündung einer geradlinigen Röhrenleitung von durchaus gleicher Weite

$$v = \sqrt{\left(\frac{478 H \times 53 D}{L + 53 D}\right)} \text{ Pariſ. Zoll.}$$

welche aus Vergleichung mehrerer Verſuche mit der gegebenen Theorie abgeleitet iſt, und in Fällen, wo eben nicht die ſchärfeſte Genauigkeit erfordert wird, mit Nutzen gebrauchet werden kann. Hierbey wird alles in Pariſer-Zollen ausgedruckt, und es iſt

D der Durchmeſſer der Röhrenweite,
L die Länge der Röhrenleitung,
H die Druckhöhe, nähmlich die lothrechte Vertiefung der Ausflußmündung unter dem Waſſerſpiegel des Behälters.

Für gegebene v, L, und H läßt ſich nach dieſer Formel auch D finden; ſo wie auch H aus v, L und D.

Die

Fig. Die Gründe, aus welchen Herr Baader dieſe Formel abgeleitet hat, ſind kürzlich folgende.

1) Für die Beſchleunigung der Schwere $g = 182$ Pariſ. Zoll, und für die Verhältnißzahl des zuſammen gezogenen Waſſerſtrahles $\alpha = 0{,}81$ kann man bey einer Druckhöhe $= H$ Pariſ. Zoll die mittlere Geſchwindigkeit, (diejenige nähmlich, womit man die wirkliche Ausflußöffnung einer kurzen Anſatzröhre multipliciren ſoll um die Ausflußmenge zu erhalten) ſehr nahe durch nachſtehende Formel ausdrucken $c = \sqrt{478H}$ Pariſ. Zoll.

2) Man hat durch Beobachtungen und Verſuche gefunden, daß der Widerſtand der Röhrenwände (eigentlich die Widerſtandshöhe, um welche man die Druckhöhe H in der eben angeführten Formel vermindern ſoll, um die geſuchte mittlere Geſchwindigkeit des Waſſers in einer Röhrenleitung zu erhalten) bey einerley Weite der Röhren dem Producte aus der Länge derſelben in die quadrirte Geſchwindigkeit des durch ſelbige fließenden Waſſers proportional ſey; bey gleicher Länge und Geſchwindigkeit aber ſich verhalte wie der Quotient aus dem Umfange des Querſchnittes dividiret durch deſſen Flächeninhalt; und daher bey kreisförmigen Querſchnitten verkehrt wie der Röhrendurchmeſſer.

3) Wenn man alſo für einen Fall den Durchmeſſer der Röhre $= D$, die Länge derſelben $= L$, die Geſchwindigkeit des durch dieſelbe fließenden Waſſers $= v$, und die Widerſtandshöhe der Röhrenwand $= x$; für einen anderen Fall den Röhrendurchmeſſer $= \delta$, die Länge $= \lambda$, die beobachtete Geſchwindigkeit $= u$, und die Widerſtandshöhe $= y$ nennt; ſo wird

$$x : y = \frac{Lv^2}{D} : \frac{\lambda u^2}{\delta} = Lv^2\delta : \lambda u^2 D,$$

$$\text{und folglich } x = \frac{yLv^2\delta}{\lambda u^2 D} \text{ ſeyn.}$$

Die wirkliche Geſchwindigkeit in der Röhre L bey der Druckhöhe H wird daher nur der Höhe $H - x$, oder

der

Fig.

der Höhe $H - \frac{yLv^2\delta}{\lambda u^2 D}$ zugehören.

Folglich iſt $v = \surd[478(H - \frac{yLv^2\delta}{\lambda u^2 D})]$;

ferner $v^2(1 + \frac{478yL\delta}{\lambda u^2 D}) = 478H$,

und $v = \frac{\surd(478H)}{\surd(1 + \frac{478yL\delta}{\lambda u^2 D})}$

4) Man hat aus mehreren Beobachtungen für bekannte Werthe von δ, λ, u und y gefunden, daß man $\frac{478y\delta}{\lambda u^2} = \frac{1}{53}$ beynahe ſetzen könne. Z. B. bey einer Beobachtung war die Druckhöhe oder das Gefälle der Röhrenleitung $= 145$ Pariſ. Zoll, $\delta = 18$, $\lambda = 43200$, und $u = 39{,}16$ Zoll. Die dieſer mittleren Geſchwindigkeit u zugehörige Höhe vermöge der Formel $c = \surd\, 478H$, oder $H = \frac{c^2}{478}$ iſt $= \frac{1533}{478} = 3{,}2$ Zoll; folglich die Widerſtandshöhe $y = 145 - 3{,}2 = 141{,}8$ Zoll; und $\frac{478y\delta}{\lambda u^2} = \frac{1}{54}$.

5) Setzet man nun den aus mehreren Beobachtungen gefundenen Werth $\frac{1}{53}$ ſtatt $\frac{478y\delta}{\lambda u^2}$ in die vorige Gleichung *n*. 3, ſo erhält man die von Hrn. Baader angegebene Formel.

$$v = \frac{\surd 478H}{\surd(1 + \frac{L}{53D})} = \surd\left[\frac{478H \times 53D}{53D + L}\right].$$

Die vorher aus dem Lehrbuche des H. Rosmann angeführte Formel für die Geſchwindigkeit in einem regelmäßigen

Fig. gen Canale beruhet auf ähnlichen Gründen. Man hat nähmlich beobachtet, daß in einem regelmäßigen Flußbette der Widerſtand, wodurch die weitere Beſchleunigung der Bewegung aufgehoben wird, dem zuſammen geſetzten Verhältniſſe aus den quadrirten Geſchwindigkeiten, und aus den Umfängen der Querſchnitte in ſoweit das Waſſer in ſolchen reichet, und ferner dem verkehrten Verhältniſſe dieſer Querſchnitte proportional ſey. Eben dieſer Widerſtand, als eine entgegengeſetzte Beſchleunigung, iſt auch proportional dem Sinus des Neigungswinkels des Canalbettes, oder dem Quotienten aus dem Gefälle dividiret durch die dazu gehörige Weite; ſo wie bey der Bewegung der ſchweren Körper auf einer ſchiefen Ebene die Beſchleunigung ſich verhält wie die Höhe der ſchiefen Ebene dividiret durch deren Länge. Wenn man daher bey zwey verſchiedenen Canälen die Abhänge oder Gefälle $= A, \alpha$, die dazu gehörigen Weiten $= B, \beta$, die Querſchnitte $= F, f$, deren Umfänge $= P, p$, und die Geſchwindigkeiten des fließenden Waſſers im Beharrungsſtande $= C, c$ ſetzet;

ſo hat man $\frac{A}{B} : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{C^2 P}{F} : \frac{c^2 p}{f}$;

folglich iſt $c = \left(\frac{C^2 BP}{AF}\right)^{\frac{1}{2}} . \sqrt{\frac{\alpha f}{\beta p}}$.

Nun hat man aus mehreren zu dieſer Abſicht gemachten Beobachtungen, da man alle Größen durch Par. Zolle ausdruckte, den Coefficienten $\left(\frac{C^2 BP}{AF}\right)^{\frac{1}{2}}$ ohngefähr $= 309$ gefunden. Es iſt alſo in einem gegebenen Canale die mittlere Geſchwindigkeit im Beharrungsſtande beyläufig

$$c = 309 . \sqrt{\frac{\alpha f}{\beta p}} \text{ Pariſer Zoll.}$$

III.

Fig.

III. Abſchnitt.

Von einigen der gebräuchlichſten Maſchinen zur Hebung des Waſſers.

§. 132.

Die Werkzeuge, deren man ſich bedienet, das Waſſer auf verſchiedene Höhen zu bringen, führen den allgemeinen Nahmen Waſſerkünſte; und heißen insbeſondere hydrauliſche Maſchinen, in ſo fern Rüſtzeuge damit verbunden ſind, um entweder die daran wirkenden Kräfte zu verſtärken, oder aber die Geſchwindigkeit der Bewegung zu vergrößern.

Die gebräuchlichſten hydrauliſchen Werkzeuge laſſen ſich füglich unter folgende drey Claſſen bringen.

1) Diejenigen, bey welchen bloß der Druck der Luft wirket, als Heber, Herons-Ball, Herons-Brunnen.

2) Die Pumpenkünſte, oder die Saug- und Druckwerke, mittelſt deren man das Waſſer auf ſehr große Höhen bringen kann.

3) Die übrigen Waſſerkünſte, als z. B. gewöhnliche Brunnen mit Schöpfeimern an einem Hebel, oder an einem Wellrade; die Schöpfräder, Kaſtenkünſte, Schaufel- und Püſchelwerke, die Archimediſche Waſſerſchraube, u. m. d. gl.

§. 133.

Eine umgebogene an beyden Enden offene Röhre ACB Fig. 40 heißt ein **Heber** (Sipho). Zuweilen iſt der Heber aus zwey geraden rechtwinkelig mit einander verbundenen Röhren zuſammen geſetzet. 40

Wenn der eine Schenkel CA des Hebers ACB in ein bis DF mit Waſſer gefülltes Gefäß DEF eingetau-

chet,

Fig. 40 chet wird, der andere Schenkel CB aber außerhalb des Gefäßes mit ſeiner Mündung B unter den Waſſerſpiegel hinabreichet; ſo füllet ſich der erſte Schenkel vermöge des hydroſtatiſchen Druckes nur bis GH. Wenn aber ſodann die Luft entweder durch Ausſaugen, oder ſonſt auf eine Art in dem übrigen Theile des Hebers verdünnet wird, ſo ſteigt das Waſſer in der Röhre AC über die Waſſerfläche DF bis C hinauf, füllet auch den anderen Schenkel CB, und fließt ununterbrochen bey der Mündung B mit einer Geſchwindigkeit heraus, deren Höhe der Vertiefung BQ der Mündung B unter dem Waſſerſpiegel DQ gleich iſt.

Denn ſo lange die Luft im Heber von G bis B mit der atmoſphäriſchen Luft einerley Dichtigkeit und Elaſticität hat; ſo iſt der Druck der Atmoſphäre gegen die Oberfläche des Waſſers DGHF, und der davon entſtehende fortgepflanzte Druck um die im hydroſtatiſchen Gleichgewichte ſtehende Waſſerſäule AG weiter hinauf zu erheben eben ſo groß, als der Gegendruck der im Heber befindlichen Luft von eben derſelben Dichtigkeit und Elaſticität. Wenn hingegen die Luft in dem Theile des Hebers GCB verdünnet wird; ſo iſt der erſte Druck ſtärker als der zweyte: das Waſſer muß daher im Schenkel AGC über den Waſſerſpiegel DF hinaufſteigen; und zwar ſo, daß, wenn der Heber gänzlich luftleer gemacht wird, der Druck der Atmoſphäre fähig iſt, das Waſſer in demſelben bis zu einer Höhe von höchſtens 32 Fuß hinaufzutreiben, jedoch nicht weiter. Iſt nun die lothrechte Erhöhung CF des Hebers über den Waſſerſpiegel kleiner als dieſe Druckhöhe der Atmoſphäre; ſo ſteigt das Waſſer bis C, und ſinket von da bis B wegen ſeines eigenen Gewichtes, und fließt auf dieſe Art bey B ununterbrochen heraus, ſo lange B niedriger liegt als der Waſſerſpiegel DF. Die Waſſerſchichte an der Mündung B wird ſodann nach der Richtung hinauswärts mit einer Kraft gepreſſet, welche die Höhe der Waſſerſäule BQ und den Druck der Atmoſphäre $= a$ (deſſen Druckhöhe auf Waſſer reduciret $= a$ höchſtens 32 Fuß ſeyn mag) zur Druckhöhe hat,

hat, weil die zwey Waſſerſäulen rechts und links an C bis Fig.
zur Ebene des Waſſerſpiegels DQ für ſich im Gleichgewichte 40
ſind. Um ſo viel nähmlich der Druck gegen die Waſſerſchichte an B nach außen durch die Waſſerſäule von der Höhe CF vermehret wird; um eben ſo viel wird der von der Atmoſphäre herrührende Druck gegen DF, der ſich durch die Waſſermaſſe gegen die Waſſerſchichte an B fortpflanzet, durch eben dieſelbe Waſſerſäule von der Höhe CF vermindert, ſo daß die Druckhöhe gegen die Waſſerſchichte an B nach außen gleich iſt $CF + QB + a - CF = BQ + a$; der Druck der Atmoſphäre aber gegen eben dieſelbe Waſſerſchichte an B nach innen hat zu ſeiner Höhe eben dieſelbe Druckhöhe der Atmoſphäre $= a$, vorausgeſetzt, daß die Mündung B nicht außerordentlich tief unter dem Waſſerſpiegel liegt. Es iſt daher die eigentliche Druckhöhe der bewegenden Kraft der Waſſerſchichte an B nach außen die Differenz der zwey Druckhöhen $QB + a$ und a, nähmlich die Höhe QB, oder die Vertiefung der Mündung B unter dem Waſſerſpiegel; und es iſt der Erfolg beynahe ſo, als wenn dieſe Waſſerſchichte in irgend einer kleinen Oeffnung eines Gefäßes befindlich wäre, und von dem darüber befindlichen ſchweren Waſſer unter der Druckhöhe BQ zum Ausſtrömen angetrieben würde; und folglich iſt dieſe Vertiefung BQ der Mündung des Hebers die der Geſchwindigkeit des ausfließenden Waſſers zugehörige Höhe.

Iſt nun bey einem ſolchen Heber das Ende B der Röhre vertical aufwärts gebogen, und die Mündung mit einer ſehr kleinen Springöffnung verſehen; ſo ſpringt das auslaufende Waſſer in Geſtalt eines Springbrunnens bis zur Höhe des Waſſerſpiegels DQ.

Wenn man den Schenkel CB des Hebers, nachdem ſolcher bereits Waſſer giebt, auch in ein Gefäß einſenket; ſo wird das Waſſer aus dem erſten Gefäße in das zweyte nur ſo lange fortfließen, als der Waſſerſpiegel in jenem höher liegt als in dieſem. Sobald aber die Waſſerfläche in beyden Gefäßen einerley Horizont erreichet; ſo höret es auf fortzufließen, und wird in dem Bogen des Hebers oberhalb

des

Fig. 40 des Waſſerſpiegels beyder Gefäße durch den beyderſeits gleichen Druck der Atmoſphäre als ruhend im Gleichgewichte erhalten. Nimmt man ſodann das erſte Gefäß DEF hinweg; ſo wird nun das Waſſer aus dem zweyten Gefäße bey der Mündung A herausfließen, ſo lange dieſe Mündung A tiefer liegt, als der Waſſerſpiegel im zweyten Gefäße.

§. 134.

Mittelſt des Hebers läßt ſich das Waſſer aus einem Behälter über eine Anhöhe, die weniger als 32 Fuß beträgt, in eine niedrigere Gegend auf folgende Art hinleiten. Der aus luftdichten Röhren verfertigte Heber ACB wird an ſeinem höchſten Puncte C mit einer Oeffnung verſehen, die ſich luftdicht verſchließen läßt. Wenn nun ein ſolcher Heber aus dem Waſſerbehälter DEF von A über die Anhöhe FC bis in die niedrigere Gegend B hingeleitet iſt; ſo werden beyde Oeffnungen A und B hinlänglich feſt verſchloſſen, C aber geöffnet, und durch dieſe letzte Oeffnung der Heber mit Waſſer gefüllet. Sodann wird C geſchloſſen und A geöffnet; ſo wird das Waſſer GC in der Röhre AC durch den Druck der Atmoſphäre in der Höhe erhalten, gleichwie auch der andere Theil des Hebers CB noch mit Waſſer gefüllet bleibt. Oeffnet man endlich B, ſo wird allda das Waſſer ununterbrochen mit einer der Höhe BQ zugehörigen Geſchwindigkeit ausfließen. Eine ſolche Einrichtung nennet man einen **Bergheber**.

§. 135.

Der **Vexierbecher** iſt ein Gefäß, durch deſſen Boden oder Seitenwand der längere Schenkel entweder eines gewöhnlichen gebogenen, oder aber eines ſolchen Hebers gehet, deſſen Schenkel in einander ſtecken; den letzteren nannte
41 man vor Zeiten den Diabetes. Aus Fig. 41 iſt die Beſchaffenheit des Vexierbechers zu erſehen. Wird nähmlich das Gefäß bis zur Höhe PQ oder darüber mit Waſſer, mit Wein, oder mit einer anderen Flüſſigkeit gefüllet; ſo füllet ſich auch der Heber, und die Flüſſigkeit läuft bey der Oeffnung des Hebers A oder B, nachdem die eine oder die andere Art des Hebers angebracht iſt, ſo lange heraus, bis das

das Gefäß beynahe ganz ausgeleeret iſt. Da man den Diabetes in einem Trinkbecher auf verſchiedene Arten verbergen kann, wodurch ein Unkündiger dieſer Einrichtung bey der Anfüllung des Trinkbechers die Flüſſigkeit verſchüttet; ſo hat man ein ſolches Trinkgefäß einen Vexierbecher genannt. Fig. 41

§. 136.

Ein Stechheber iſt ein oben und unten verengtes Gefäß, welches durch den äußeren Druck der Atmoſphäre ſich mit einer Flüſſigkeit anfüllet, wenn man die untere Oeffnung in ſolche eintauchet, und durch das Anſaugen an der oberen die Luft im Gefäße verdünnet. Verſchließt man ſodann die obere Oeffnung mit dem Finger; ſo wird die in das Gefäß eingetretene Flüſſigkeit in ſolchem erhalten, wenn man auch die untere verengte Röhre des Stechhebers aus der Flüſſigkeit herauszieht, weil der Druck der Atmoſphäre das Auslaufen der Flüſſigkeit aus dieſer verengten Röhre verhindert. In Fig 42 iſt ein Stechheber AC abgebildet, 42
der mit einem Handgriffe verſehen iſt. Die Stechheber ſind gemeiniglich aus Glas gemacht, und werden gebrauchet um aus einem Faſſe bey dem Spundloche etwas Wein herauszuheben.

§. 137.

Aus den Eigenſchaften des Hebers laſſen ſich die ſogenannten intermittirenden Brunnquellen, wie auch verſchiedene andere Erſcheinungen der Natur ſehr gut erklären. Man nennt intermittirende Quellen ſolche, die zu manchen Zeiten kein Waſſer geben, und dann aber wieder ſtark zu laufen anfangen. Wäre z. B. ACB Fig. 43 ein Waſſerbehältniß in 43
einem Berge, welches ſein vom eingeſeigerten Regen erhaltenes Waſſer durch die Oeffnung bey C in den unterirdiſchen Gang CDE fortleitete, und bey E in einer niedrigeren Gegend wieder an Tag brächte; ſo iſt CDE als ein Heber anzuſehen, der nicht eher zu laufen anfängt, als bis der Waſſerſpiegel AB erweitert die Höhe D erreichet; und von dieſem Zeitpuncte an läuft er ſo lange, bis das Behältniß bis C ausgeleeret iſt.

Fig. §. 138.

44 Der Herons-Ball (Pila Heronis) iſt ein luftdichtes Gefäß ABCD Fig. 44 von kugelförmiger oder ſonſt beliebiger Geſtalt, das bis zu einer gewiſſen Höhe etwa bis GH mit Waſſer gefüllet iſt, auf welches die im übrigen Raume GABH befindliche Luft durch ein Uebermaß der Elaſticität drücket, und das Waſſer durch eine oben verengte Röhre EF, die durch den Deckel bis gegen den Boden des Gefäßes geht, in Geſtalt eines Springbrunnens in die Höhe treibt.

Es erfolgt aber ein Uebermaß der Elaſticität der Luft, wenn man die im Raume ABHG eingeſchloſſene Luft verdichtet. Iſt das Gefäß ziemlich klein, ſo kann eine merkliche Verdichtung ſchon dadurch bewirket werden, daß man mit dem Munde ſo ſtark, als man kann, durch die Oeffnung F hineinbläſet. Durch die Erhitzung des Gefäßes kann die Elaſticität der eingeſchloſſenen Luft noch mehr verſtärket werden. Iſt der Herons-Ball ſo eingerichtet, daß man ſolchen auf eine Druckpumpe anſchrauben kann; ſo läßt ſich dadurch ein ſehr hoher Waſſerſtrahl bewirken; nur muß das Gefäß ſtark genug ſeyn, damit es durch die ſehr zuſammen gedrückte Luft nicht zerſprenget wird. Um den Herons Ballen mit Waſſer anfüllen zu können, muß außer der Springröhre noch eine andere Oeffnung angebracht ſeyn, die man durch eine Schraube luftdicht verſchließen kann. Iſt der Herons-Ball klein, ſo füllet ſich ſolcher mit Waſſer, wenn man ihn erhitzet, und ſodann deſſen Springröhre ins Waſſer eintauchet.

§. 139.

45 Der Herons-Brunnen Fig. 45 beſteht aus dem Herons-Ballen AB, und aus zwey anderen Gefäßen VO und CQ, welche mittelſt zweyer Röhren GH und LK verbunden ſind, deren eine aus dem oberen offenen Gefäße VO dem unteren CQ Waſſer zuführet, und die andere aus dem unteren geſchloſſenen Gefäße die verdrängte Luft in den Herons-Ballen leitet.

Anfangs muß der Herons-Ball AB etwa bis RS mit Waſſer gefüllet werden, und dazu dienet eine eigene im oberen Deckel befindliche Oeffnung, die ſodann luftdicht ver-

verſchloſſen werden muß. Darauf gießt man Waſſer in die obere Schüſſel VO; ſolches fließt durch die Röhre GH in das untere von allen Seiten luftdicht verſchloſſene Gefäß CQ hinab, und treibt, ſo wie es darin höher ſteigt, einen Theil der Luft aus demſelben durch die Röhre LK hinauf in den Herons-Ballen. Dadurch wird die Luft in dem oberen Raume ARSO des Herons-Ballens und zugleich in der Röhre LK, wie auch im Raume des unteren Gefäßes oberhalb MN verdichtet, ſo lange bis ſie mit dem Drucke der Waſſerſäule GH im Gleichgewichte iſt. Hält man bis dahin die Oeffnung bey F verſchloſſen; ſo ſpringt darauf das Waſſer mit einer Geſchwindigkeit heraus, die der Höhe GH zugehöret. Das untere Gefäß CQ muß auch noch eine luftdicht verſchloſſene Oeffnung haben, die man öffnen kann, um das bereits angefüllte Gefäß CQ auszuleeren, wenn man einen ſolchen Springbrunnen von neuem anlaſſen will. Fig. 45

Der Herons-Ball und Herons-Brunnen ſind von Hero zu Alexandria, einem Schüler des Cteſibius ungefähr 100 Jahre vor Chriſti Geburt beſchrieben worden.

§. 140.

Eine Waſſerpumpe überhaupt iſt eine cylindriſche, zuweilen auch priſmatiſche Röhre, worin vermittelſt eines auf- und niedergehenden Kolbens und einiger gehörig angebrachter Ventile oder Klappen das Waſſer auf jede beliebige Höhe gebracht werden kann.

Die Ventile einer Waſſerpumpe ſind entweder Klappenventile, oder Muſchelventile. Ein Klappenventil beſteht aus einer Hülſe, das iſt aus einem Ringe von Holz oder Meſſing, und aus einer darauf fallenden und gut ſchließenden Klappe von Leder mit etwas Bley beſchweret, und mit einer Scharnier verſehen. Ein Muſchelventil, welches auch Kegelventil heißt, beſteht aus einer metallenen Hülſe, in deren Oeffnung ein abgekürzter Kegel paſſet, deſſen Stift von der unteren kleineren Grundfläche des Kegels unter der Hülſe durch einen Bügel geht, und ſich in einen Knopf endiget, um den Kegel beym Auf- und Zuſchließen in ſeiner Lage zu erhalten.

Fig. Das meiſt gewöhnliche Kolbenventil beſteht aus 6 runden Löchern rings um die Achſe des Kolbens, welche mit einer runden Scheibe vom ſtarken Leder bedecket werden. Dieſe Lederſcheibe iſt in ihrem Mittelpuncte an die obere Kolbenfläche angeſchraubet, und von einer ſolchen Größe, daß ſie mit ihrem Umfange allenthalben an die cylinderiſche Wand des Stiefels genau anſchließt. Auch die Röhrenventile können in Ermangelung beſſerer Ventile auf die Art verfertiget werden, wie es eben von dem meiſt gewöhnlichen Kolbenventile geſagt worden iſt.

§. 141.

Die Waſſerpumpen werden abgetheilet 1) in Hebepumpen oder Hebewerke, 2) in Saugwerke, 3) in Druckwerke, und 4) in vereinigte Saug- und Druckwerke.

Ein Hebewerk beſteht 1) aus einer Pumpenröhre oder
46 aus dem Stiefel AB Fig. 46, worin der Kolben mit ſeinem Ventile auf und niedergeht, und ſich immer unter dem Waſſerſpiegel MN des Behälters befindet, aus welchem das Waſſer gehoben werden ſoll; 2) aus der Steigröhre AC oberhalb des Stiefels mit einer Ausgußöffnung D in derjenigen Höhe, auf welche das Waſſer gehoben werden ſoll; 3) aus einem Röhrenventile in der Pumpröhre unter dem niedrigſten Stande des Kolbens, welches ſich mit dem Kolbenventile beym Aufziehen und Niederſtoßen des Kolbens wechſelweiſe aufwärts öffnet, und wieder ſchließet. Weiter unten im Waſſerbehälter iſt ein Seiger mit mehreren kleinen Oeffnungen angebracht, oder ſtatt deſſen die untere Oeffnung der Pumpröhre mit einem Netze von Eiſendraht überzogen, damit nicht fremdartige gröbere Körper mit dem Waſſer in die Pumpröhre eintreten, welche die Ventile verderben könnten. Dieſes iſt auch bey den weiter unten zu erklärenden Pumpwerken zu beobachten. Aus dieſer kurzen Beſchreibung eines Hebwerkes iſt es nun zu erſehen, daß beym Aufziehen des Kolbens das Kolbenventil geſchloſſen verbleibe ſowohl wegen ſeines eigenen Gewichtes als auch wegen des Druckes der Atmoſphäre, und daß dabey das Röhrenventil ſich öffne, wodurch das Waſſer durch den äußeren Druck angetrieben

dem

dem Kolben folgen muß. Wird ſodann der Kolben nieder- geſtoßen: ſo wird dadurch ſogleich das Röhrenventil ge- ſchloſſen, das Kolbenventil aber geöffnet, und das Waſſer tritt nun über den Kolben in die Steigröhre, welches nach wiederhohlten Kolbenzügen ſich ober dem Kolben immer ver- mehret, und immer höher gehoben wird, bis es in der Steigröhre durch die Ausgußöffnung ausfließt. Die mei- ſten Pumpenbrunnen ſind dergleichen Hebewerke. Fig. 46

Der Widerſtand, der ſich in einem Hebewerke der Kraft am Kolben bey deſſen Aufziehen entgegen ſetzet, nach- dem die Steigröhre bis zur Ausgußöffnung mit Waſſer ge- füllet iſt, beſteht nebſt der Reibung aus dem Gewichte einer Waſſerſäule, welche die Kolbenfläche oder den Querſchnitt des Stiefels zur Grundfläche, und die Erhöhung der Aus- gußöffnung über den Waſſerſpiegel des Behälters zur Höhe hat, wozu auch noch das Gewicht der Kolbenſtange im Waſſer und des Kolbens ſelbſt zu rechnen iſt. Dieſes Ge- wicht wie auch das Gewicht der Waſſerſäule wird bey den gewöhnlichen Pumpbrunnen meiſtens mittelſt des ſchweren doppelarmigen Hebels und mittelſt des Zugſchwenkels ins Gleichgewicht geſetzet, ſo daß beym Waſſerpumpen eigentlich nur die Reibung des Kolbenleders an der Wand des Stie- fels, und die Reibung in den Zapfenlagern des Hebels zu überwältigen iſt. Uebrigens muß die bewegende Kraft an einer ſolchen Hebepumpe deſto größer ſeyn, je geſchwinder der Kolben beweget werden ſoll, und je größer das Kol- benſpiel oder der Kolbenzug iſt, nähmlich die Länge des Stiefels vom niedrigſten bis zum höchſten Stande des Kol- bens. Die Waſſermenge, welche ein ſolcher Pumpenbrun- nen bey jedem Kolbenzuge liefert, iſt am cubiſchen Inhalte einer Waſſerſäule gleich, welche den Querſchnitt des Stie- fels zur Grundfläche und die Länge des Kolbenſpieles zur Höhe hat.

Wenn man eine Waſſerpumpe ſo einrichtet, daß das Röhrenventil gleich unter dem Waſſerſpiegel des Behälters ſich befindet, weiter unter dieſem aber der Kolben mit ſeinem

Ventil

Fig. Ventil ſein Spiel hat, ſo iſt eine ſolche Waſſerpumpe auch ein Hebewerk.

§. 142.

Ein Saugwerk beſteht 1) aus der Saugröhre AB
47. Fig. 47, die mit ihrem unteren Ende im Waſſer ſteht, und gemeiniglich unter dem Waſſerſpiegel MN mit einem Röhrenventile verſehen iſt; 2) aus der eigentlichen Pumpröhre oder aus dem Stiefel AC ober dem Waſſerſpiegel, worin der Kolben mit ſeinem Ventile auf- und niedergeht. Dieſe Pumpröhre hat da, wo ſie ſich an die Saugröhre anſchließt, unter dem niedrigſten Stande des Kolbens auch ein Röhrenventil; 3) aus der Steigröhre CD oberhalb des Kolbenſpieles mit der Ausgusöffnung in derjenigen Höhe, auf welche man das Waſſer heben ſoll. Die Saugröhre hat gemeiniglich eine kleinere Weite als die Pumpröhre, etwa nur $\frac{2}{3}$ von dieſer. Die Steigröhre aber iſt öfters mit der Pumpröhre gleich weit, oder noch etwas darüber, damit man jederzeit den Kolben bequem herausnehmen könne, wenn er friſch geledert werden ſoll.

Wird nun bey einer ſolchen Einrichtung eines Saugwerkes der Kolben in die Höhe gezogen, ſo verbleibt das Kolbenventil verſchloſſen, und dadurch wird die Luft zwiſchen dem Kolben und dem Waſſerſpiegel verdünnet; der äußere nun größere Druck der Atmoſphäre wird daher die beyden Röhrenventile unter dem Kolben öffnen, und das Waſſer in die Saugröhre hinauftreiben. Wird ſodann der Kolben hinuntergeſtoßen, ſo ſchließen ſich ſogleich die 2 Röhrenventile, das Kolbenventil aber öffnet ſich, wodurch das Waſſer, wenn es ſchon bis zur Grundfläche des Kolbens bey deſſen höchſtem Stande geſtiegen ſeyn ſollte, nun über den Kolben hinauftritt. Iſt aber das Waſſer in der Saugröhre noch nicht bis zum Kolben geſtiegen, ſo wird beym Herunterſtoßen des Kolbens jederzeit eine gewiſſe Menge Luft aus dem Raume zwiſchen dem Waſſerſpiegel in der Saugröhre und zwiſchen dem Kolben über dieſen in die Steigröhre hinaufgeſchaffet, wodurch endlich bey fortgeſetztem Kolbenſpiele das Waſſer über den Kolben in die Steigröhre tritt,

und

und darin immer höher ſteigt, bis es in der erforderlichen Höhe bey der Ausgußöffnung herausfließt. Der Kolben muß bey ſeinem niedrigſten Stande ſo nahe als möglich an das erſte Röhrenventil anſchließen, damit der Zwiſchenraum beym niedrigſten Stande des Kolbens zwiſchen dieſem und dem erſten Röhrenventile, welcher der ſchädliche Raum der Pumpe genannt wird, möglichſt klein werde. Das 2te Röhrenventil unter dem Waſſerſpiegel iſt nicht umumgänglich nothwendig; es wird ſolches nur größerer Sicherheit wegen angebracht, damit das Waſſer nicht ausbleibe, wenn etwa durch längeren Gebrauch das obere Röhrenventil etwas ſchadhaft werden ſollte. Fig. 47.

Die Erhöhung des Kolbens in ſeinem höchſten Stande über den Waſſerſpiegel des Behälters muß bey einem Saugwerke weniger als 32 Fuß betragen. Denn höchſtens bis zu dieſer Höhe treibt der äußere Druck der Atmoſphäre das Waſſer nur alsdann, wenn die Luft ganz rein ausgepumpet wird. Da aber ſolches in den Saugwerken nie völlig genau bewerkſtelliget werden kann, über dieß auch zur Eröffnung der Röhrenventile immer etwas von dem Drucke der Atmoſphäre verwendet werden muß; ſo muß die Saugröhre vom höchſten Stande des Kolbens bis zum niedrigſten Waſſerſpiegel im Behälter immer beträchtlich kleiner ſeyn, als 32 Fuß; man macht ſie daher ſelten über 24 Fuß lang. Auch der ſchädliche Raum verhindert zuweilen, daß das Waſſer in einem Saugwerke nicht bis zum Kolben hinaufſteigen kann, wenn ſchon dieſer beträchtlich weniger als 32 Fuß über den Waſſerſpiegel des Behälters erhöhet iſt. Jedoch dieſes Hinderniß wird beſeitiget, wenn man die Saug- und Pumpröhre, ehe man ein dergleichen Saugwerk in Bewegung ſetzet, von oben mit Waſſer anfüllet.

§. 143.

Aufgabe.

Den Widerſtand zu finden, der ſich in einem Saugwerke der Kraft am Kolben bey deſſen Aufziehen

Fig. ziehen entgegen ſetzet, wenn die Pumpe ſchon bis zur Ausgußröhre mit Waſſer gefüllet iſt.

Auflöſung.

Es ſey f die obere Kolbenfläche oder der Querſchnitt des Stiefels, a die auf Waſſer reducirte Druckhöhe der Atmoſphäre beyläufig 32 Fuß, b die Erhöhung des Kolbens über den Waſſerſpiegel des Behälters, c die Höhe des Waſſers über den Kolben bis zur Ausgußröhre, und q wie bisher das eigenthümliche Gewicht des Waſſers; ſo wird der Kolben von oben herab getrieben von einer Kraft $= faq + fcq$, nähmlich von dem Drucke der Atmoſphäre faq, und von dem Gewichte der Waſſerſäule fcq ober dem Kolben; von unten herauf aber wird der nähmliche Kolben aufwärts getrieben von einer Kraft $= faq - fbq$, nähmlich von dem auf den Waſſerſpiegel des Behälters wirkenden und gegen den Kolben aufwärts fortgepflanzten Drucke der Atmoſphäre faq, der um das Gewicht der Waſſerſäule fbq unter dem Kolben bis zum Waſſerſpiegel des Behälters vermindert iſt. Dieſe zwey gegen den Kolben von oben und von unten wirkenden Kräfte ſind einander entgegengeſetzet; folglich iſt ihre Differenz $(faq + fcq) - (faq - fbq) = f(b + c)q$ die Kraft von oben herab, oder der Widerſtand, der ſich dem Aufziehen des Kolbens wiederſetzet, dieſer Widerſtand iſt daher gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule, die den Querſchnitt des Stiefels zur Grundfläche, und die Erhöhung der Ausgußröhre über den Waſſerſpiegel des Behälters zu ihrer Höhe hat.

Bey der wirklichen Bewegung muß die Kraft, welche den Kolben in die Höhe ziehen ſoll, größer ſeyn als der angeführte Widerſtand, weil auch zur Ueberwältigung der Reibung zwiſchen dem Kolben und dem Stiefel eine Kraft erforderlich iſt, und über dieſes je ſchneller der Kolben auf- und niederwärts ſich bewegen ſoll, eine deſto größere Kraft hierzu nothwendig iſt.

§. 144.

§. 144. Fig.

Um die Waſſermenge zu finden, welche ein Saugwerk im Beharrungsſtande binnen einer beſtimmten Zeit, z. B. in jeder Minute liefert, muß man wiſſen, wie vielmahl in jeder Minute der Kolben in die Höhe gezogen wird, und wie groß die Höhe eines jeden Kolbenzuges ſey. Wenn man nun den Inhalt des Cylinders, der den Querſchnitt des Stiefels zur Grundfläche, und die Höhe des Kolbenzuges zur Höhe hat, mit der gegebenen Anzahl der Kolbenzüge binnen einer beſtimmten Zeit multipliciret; ſo erhält man den cubiſchen Inhalt der Waſſermenge für dieſe Zeit; dabey wird vorausgeſetzet, daß der Kolben und die Ventile ſo genau ſchließen, daß ſie kein Waſſer von oben herab durchfließen laſſen.

§. 145.

Ein Druckwerk Fig. 48 beſteht 1) aus der Pumpröhre oder dem Stiefel AB, der mit ſeinem unteren Ende BC im Waſſerbehälter unter den Waſſerſpiegel reichet, und worin ein genau paſſender Kolben ohne Ventil auf- und niederbeweget wird; 2) aus der Knieröhre CD; und 3) aus der damit verbundenen Steigröhre DE, welche das in die Höhe gedrückte Waſſer an den beſtimmten Ort hinleitet. Sowohl der Stiefel an ſeinem unteren Ende, als auch die Knieröhre an ihrer oberen Oeffnung haben Ventile, die ſich aufwärts öffnen. Die Knie- die Saug- und die Steigröhre haben zu ihrer Weite höchſtens $\frac{2}{3}$ der Weite des Stiefels. 48

Wird der Kolben, der nur bis zum Anſatze der Knieröhre hinabgehen kann, damit er deren Oeffnung nicht verſchließt, mittelſt der Druckſtange und mittelſt des damit verbundenen Mechanismus in die Höhe gezogen; ſo wird die Luft im Stiefel unter dem Kolben, und in der Knieröhre unter dem Ventile verdünnet, weil inzwiſchen das Ventil in der Knieröhre geſchloſſen bleibet: das Waſſer des Behälters wird daher durch den Druck der Atmoſphäre das untere Ventil eröffnen, und in den Raum des Stiefels und der Knieröhre eintreten. Wird ſodann der Kolben herunter geſtoſſen; ſo ſchließt ſich ſogleich das Ventil in der Pumpröhre

Fig. röhre untere dem Kolben, und das eingetretene Waſſer wird durch das Ventil der Knieröhre in die Steigröhre gepreſſet, bis es nach wiederholtem Kolbenſpiele zu der erforderlichen Höhe gelanget, und da ausfließt.

§. 146

An einem Druckwerke iſt der Widerſtand beym Herunterſtoßen des Kolbens, wenn die Steigröhre ſchon gefüllet iſt, dem Gewichte einer Waſſerſäule gleich, welche den Querſchnitt des Kolbens oder des Stiefels zur Grundfläche, und die lothrechte Erhöhung des Ausgußes über den Kolben zur Höhe hat. Hierzu kommt noch die ſehr beträchtliche Reibung des Kolbens gegen die Wand des Stiefels, die man aus Verſuchen beſtimmen muß.

Die Waſſermenge, welche bey jedem Niedergange des Kolbens in die Steigröhre hineingetrieben wird, und bey der Ausgußöffnung ausfließt, iſt eine Waſſerſäule, welche den Querſchnitt des Stiefels zur Grundfläche, und die Höhe eines Kolbenzuges zur Länge hat, vorausgeſetzt daß ſowohl der Kolben als auch beyde Ventile ganz genau ſchließen. Iſt es nun dabey auch bekannt, wie vielmahl der Kolben in einer beſtimmten Zeit auf und niedergeht; ſo kann man auch die Waſſermenge für dieſe Zeit berechnen.

§. 147.

Wenn bey einem Druckwerke der Stiefel nicht im Waſſer ſteht, ſondern mittelſt einer Saugröhre wie bey einem Saugwerke mit einem Waſſerbehälter in Verbindung iſt, ſo nennt man ein ſolches Pumpwerk ein vereinigtes Saug- und Druckwerk. Die lothrechte Erhöhung der Saugröhre vom Waſſerſpiegel des Behälters bis zum Kolben darf auch hier wegen der im §. 142. angeführten Urſache nicht viel über 24 Fuß betragen. Uebrigens iſt es nicht nothwendig, daß die Saugröhre in lothrechter Richtung von der Pumpröhre bis zum Waſſer gerade hinunter gehe; ſie kann in einer nach Belieben gebogenen Richtung, wenn es die Umſtände ſo erfordern, bis unter den Waſſerſpiegel eines entfernt liegenden Behälters geführet werden.

Bey

Bey dem vereinigten Saug- und Druckwerke iſt der Widerſtand, welchen der Kolben beym Niederſtoßen zu überwinden hat, ſo groß, wie es im §. 145 gezeiget worden iſt; beym Aufziehen des Kolbens hingegen iſt der Widerſtand außer der Reibung gleich der Waſſerſäule, welche den Querſchnitt des Stiefels zur Grundfläche, und die Vertiefung des Waſſerſpiegels des Behälters unter dem höchſten Stande des Kolbens zur Höhe hat. Die Waſſermenge, welche ein vereinigtes Saug- und Druckwerk in einer beſtimmten Zeit auf eine beſtimmte Höhe hinaufbringet, wird nach §. 146 berechnet. Fig.

§. 148.

Sind die Kolbenſtangen von zwey Waſſerpumpen mittelſt einer mechaniſchen Anrichtung, etwa mittelſt einer doppelten Kurbel, oder auch mittelſt eines ſo genannten Kunſtkreuzes ſo verbunden, daß ſie wechſelweiſe auf- und abwärts ſich bewegen; ſo nennt man eine ſolche Anrichtung ein doppeltes Pumpenwerk. Sind mehrere Paare der Waſſerpumpen ſo verbunden, daß die halbe Anzahl der Kolben ſteigt, wenn die andere Hälfte ſinket, ſo heißt dieſes ein zuſammen geſetztes Pumpenwerk. Aus dem Vorhergehenden iſt es leicht abzunehmen, wie der Widerſtand und die Waſſermenge eines zuſammen geſetzten Pumpenwerkes zu berechnen ſeyn, es mag ſolches ein Saug- oder Druckwerk, oder ein vereinigtes Saug- und Druckwerk ſeyn. Auch iſt es leicht begreiflich, daß mehrere Pumpenröhren eines zuſammen geſetzten Druckwerkes eine einzige gemeinſchaftliche Steigröhre von einer erforderlichen Weite haben können.

§. 149.

Ein Druckwerk, deſſen aufwärts gebogene Steigröhre nur wenige Fuß hoch, und am oberen Ende mit einem engen Aufſatzrohre verſehen iſt, mit hinlänglicher Kraft und Geſchwindigkeit angetrieben gibt einen ſteigenden Waſſerſtrahl wie ein Springbrunnen, und wird wegen ſeines Gebrauches bey der Löſchung einer entſtandenen Feuersbrunſt, eine Feuerlöſchſpritze, oder kurzweg eine Feuerſpritze genannt.

Wenn

Fig. Wenn die Kraft nach Abſchlag desjenigen Theiles, welcher zur Ueberwindung der Reibung verwendet wird, gegeben iſt, womit der Kolben bey einer Feuerſpritze gegen das Waſſer wirklich gepreſſet wird, ſo läßt ſich daraus die Höhe des lothrechten Waſſerſtrahles $= a$ berechnen.

Denn wenn man dieſe Kraft $= P$ in eine ſchwere Waſſerſäule verwandelt, deren Grundfläche der Querſchnitt $= f$ des Kolbens oder des Stiefels iſt, und welche eine gewiſſe Höhe $= A$ zu ihrer Höhe hat, wo nähmlich $A = \frac{P}{fq}$ ſeyn muß; ſo iſt der Erfolg eben ſo, als wenn der ſpringende Waſſerſtrahl bey einem Springbrunnen von der Druckhöhe $= A$ bewirket würde; die Höhe des Waſſerſtrahles iſt daher nach §. 91.

$$a = -150 + 10\sqrt{(3A + 225)} \text{ Pariſ. Fuß.}$$

Und umgekehrt, wenn die lothrechte Höhe $= a$ gegeben iſt, welche der ſpringende Waſſerſtrahl einer Feuerſpritze erreichen ſoll; ſo läßt ſich die Kraft berechnen, mit welcher der Kolben bey ſeiner Bewegung gegen die Waſſerfläche angedrücket werden muß.

Denn aus der gegebenen Höhe $= a$ des Waſſerſtrahles folget (vermöge §. 91.) die zur Erzeugung dieſes Waſſerſtrahles zugehörige Druckhöhe.

$$A = a + \frac{a^2}{300} \text{ Par. Fuß.}$$

Mit dieſer gefundenen Druckhöhe multiplicire man dann den Querſchnitt des Kolbens oder des Stiefels; ſo erhält man den kubiſchen Inhalt einer Waſſerſäule, deren Gewicht der geſuchten Kraft gleich iſt.

Z. B. Der Stiefel einer Feuerſpritze iſt 6 Zoll im Durchmeſſer, und der Strahl ſoll 80 Par. Fuß hoch ſteigen; ſo iſt $a = 80$, alſo $A = 80 + \frac{6400}{300} = 101$ Fuß. Die Grundfläche des Kolbens oder der Querſchnitt des Stiefels

hat

hat im Durchmeſſer $\frac{1}{2}$ Fuß; alſo iſt ihr Flächeninhalt = $\frac{1}{16}\pi$ = 0,19635 Quadrat Fuß. Dieſer mit A = 101 Fuß multipliciret gibt 19,83 Kub. Fuß für den Inhalt einer Waſſerſäule, deren Gewicht der geſuchten Kraft gleich iſt. Wird nun dieſer kubiſche Inhalt mit 70 Pariſ. Pfunden als dem Gewichte eines Par. Kub. Fußes Waſſer multipliciret, ſo erhält man 1388 Par. Pfunde für die geſuchte Kraft. Fig.

Um bey einer Feuerſpritze einen ununterbrochen ſteigenden Waſſerſtrahl zu erhalten, verbindet man mit der Steigröhre derſelben einen ſo genannten Windkeſſel, welchen man bey den vorhandenen Feuerſpritzen ſehen kann. Das weſentliche eines ſolchen Druckwerkes mit dem Windkeſſel iſt aus Fig. 49 zu erſehen. Es wird nähmlich bey der lebhaften Bewegung eines ſolchen Druckwerkes, nachdem bereits das Waſſer in die Steigröhre BF eingetreten iſt, durch den gepreßten Zuſtand des Waſſers die Luft aus dem Raume AEB in den viel kleineren Raum CED zuſammengedrücket, welche ſodann beym Aufziehen des Kolbens, wo das Ventil in der Knieröhre niederfällt, durch ihre vergrößerte Elaſticität das Waſſer bey der kleinen Springöffnung F der Steigröhre hinaustreibt. 49

§. 150.

Für den Erfinder der Waſſerpumpen hält man den Cteſibius aus Alexandria in Aegypten, der nicht lange nach Archimedes gelebet, und den ſchon obengenannten Hero gebildet hat.

Von der Art, wie die Kolben bey den Pumpwerken beweget werden, gibt die practiſche Mechanik Unterricht, welches man auch an verſchiedenen im Großen erbauten Pumpenkünſten dieſer Art zu ſehen Gelegenheit hat.

Eine höchſt ſinnreiche und nützliche Art eines dergleichen Mechanismus iſt die in England ſo vielfältig gebrauchte, Dampfmaſchine oder Feuermaſchine, welche nicht nur zur Bewegung der Kolben bey den Pumpwerken um eine ſehr große Menge Waſſer auf eine beliebige Höhe zu brin-

Fig. gen, ſondern auch zur unmittelbaren Umdrehung der Mühlräder bey Getreide- und Sägemühlen, bey Stampf- und Hammerwerken, Münzpreſſen, u. m. d. gl. angewendet wird. Eine ausführliche Beſchreibung und Zeichnung der Feuermaſchine nach den neueſten Verbeſſerungen findet man in der Nouvelle Architecture hydraulique par Prony, überſetzt von Hrn. Langsdorf Frankfurt am Mayn 1794.

Für ſolche, die nicht Gelegenheit haben das genannte Werk des H. Prony zu ſehen und zu ſtudieren, wird eine oberflächliche Beſchreibung und eine Zeichnung im Durchſchnitt der Feuermaſchine nach Hrn. Lorenz Elementen der Mathematik der 2ten Auflage Leipzig 1795 hier nicht überflüſſig ſeyn.

50 ACB Fig. 50 iſt ein doppelarmiger Hebel, der ſich um C drehet, und an dem die Kolbenſtangen D, E, F, G, hangen. Die Stange D, die den Kolben H des Dampf-Cylinders K treibt, läuft durch eine mit Werg und Talg gefütterte dampfdichte Büchſe bey D, und durch die kreisrunde genau anſchließende Oeffnung der gegoſſenen Platte, die den Dampf-Cylinder oben verſchließt.

Aus dem Dampfkeſſel L, der über einem bey M angelegten Feuer ſteht, treten die von dem ſiedenden Waſſer aufſteigenden Dämpfe durch die Röhre a, wo ſie das Ventil bey b öffnen, in den Canal bcd; dringen bey d in den Dampf-Cylinder über den Kolben H und treiben durch ihre Elaſticität denſelben herab, wenn unter ihm, wie hernach gezeiget wird, ein beynahe leerer Raum entſtanden iſt. Der auf dieſe Art herabgetriebene Kolben zieht den Hebelsarm CB, und mit ihm die Kolbenſtangen E, F, G hinauf.

Hat der Kolben H ſeinen niedrigſten Stand oberhalb f erreichet; ſo treten die eingedrungenen Dämpfe durch d zurück in den Canal dcb, ſchließen das Ventil bey b, öffnen das Ventil bey c, und dringen durch die Communications-Röhre cef bey f in den Dampf-Cylinder unter dem Kolben H, bis ſie mit dem zurückgebliebenen Theile über demſelben das Gleichgewicht halten, wo ſodann der Hebelsarm CB, und mit ihm die Kolbenſtangen E, F, G, durch das

daran

daran hangende Uebergewicht herab, alſo der andere Arm GA und mit ihm der Kolben H hinaufgezogen wird. Fig. 50

Der aufſteigende Kolben H treibt den über ihm befindlichen Dampf durch d zurück nach der Communications-Röhre und nach dem unteren Theile des Dampf-Cylinders; wo ſodann dieſe Dämpfe zuſammen das Ventil bey g öffnen, und in die Condenſations-Röhre ghk dringen, welche durch ein Ventil bey k verſchloſſen iſt. In dieſe Condenſations-Röhre tritt bey m der eine offene Schenkel mn eines gebogenen Hebers lmn, wovon der andere durch ein Ventil bey l verſchloſſene Schenkel ml in einer mit kaltem Waſſer gefüllten Ciſterne N ſtecket.

Hat der Kolben H ſeinen höchſten Stand erreichet, ſo öffnet ſich das Ventil l, durch welches das kalte Waſſer in den Heber lmn dringet, bey n ausſpritzet, und die Dämpfe abkühlet, wo indeſſen die Ventile bey b und k verſchloſſen ſind. Darauf ſchließen ſich die Ventile bey g und l; das Ventil bey b aber öffnet ſich wieder, und neue Dämpfe treten, wie anfangs aus dem Dampfkeſſel in den Dampf-Cylinder über den Kolben H, unter welchem nach obigem ein leerer Raum entſtanden iſt, ein, und treiben denſelben wieder herab.

Um aber das eingeſpritzte Waſſer, das durch die Dämpfe heiß geworden, und noch in der Condenſations-Röhre zurückgeblieben iſt, nebſt der darin entwickelten Luft herauszubringen, dienen die Pumpen PQ, RS, deren erſtere das heiße Waſſer, indem ſich das Ventil bey k öffnet, der anderen zuführet, die ihr Ventil bey R hat, und dieſes Waſſer in die Höhe fördert, und es durch eine Röhre bey S in den Dampfkeſſel zur Erſetzung des abgegangenen leitet.

Mittelſt des bisher erklärten Mechanismus des wechſelſeitigen Auf- und Niedergehens des Hebels ACB wird die an B angebrachte Laſt, ſie beſtehe nun worin ſie wolle, in Bewegung geſetzet. In der Zeichnung iſt eine ſolche Laſt die Kolbenſtange E eines Saugwerkes TV, welches das aus der Tiefe gehobene Waſſer bey X ausſchüttet.

Ein

Fig. Ein weſentlicher Theil der Feuermaſchine iſt auch die Steuerung, wodurch die wechſelweiſe Eröffnung und Verſchließung der Ventile bewirket wird. Eben ſo iſt auch der neue Mechanismus merkwürdig, welcher mit der wechſelweiſe auf- und niedergeh nden Bewegung des Hebels verbunden eine ununterbrochene Umlaufsbewegung eines Mühl- oder anderen Maſchinenrades hervorbringt. Man muß überhaupt die gan‚e Feuermaſchine, die wegen ihrer ſinnreichen Zuſammenſetzung, und großen Nutzbarkeit dem menſchlichen Erfindungsgeiſte zu beſonderer Ehre gereichet, im Großen oder im Modelle ſehen, um einen deutlichen Begriff von ihrer Zuſammenſetzung und Wirkung zu erlangen.

Bey der angeführten Dampfmaſchine iſt der Druck der Atmoſphäre gegen den Kolben des Dampf-Cylinders ausgeſchloſſen. Bey der erſten Erfindung dieſer Maſchine gegen Ende des 17ten Jahrhunderts mußte die elaſtiſche Kraft der Waſſerdämpfe nebſt der zu bewegenden Laſt auch den großen Druck der Atmoſphäre gegen den Kolben des Dampf-Cylinders überwältigen. D s Weſentliche der älteren Erfindung der Dampfmaſchine beſteht kürzlich im Folgenden, wie es Hr. Burja in den Grundlehren der Hydroſtatik, Berlin 1790 beſchrieben hat.

51 A Fig. 51 iſt ein auf $\frac{2}{3}$ mit Waſſer gefüllter Keſſel, nebſt einem gewölbten am Keſſel wohl befeſtigten Deckel B. Dieſer Deckel hat eine Oeffnung und darüber eine Röhre C; dieſe wird durch einen Hahn C wechſelweiſe geſchloſſen und geöffnet. Dieſe Röhre endiget ſich in einen Stiefel H von beträchtlicher Weite nach Verhältniß der zu bewegenden Laſt. An dieſem Stiefel iſt noch ſeitwärts eine dünne Röhre I, die ebenfalls durch einen Hahn K wechſelweiſe verſchloſſen und geöffnet wird, und beſtändig mit Waſſer unter einer anſehnlichen Druckhöhe angefüllet ſeyn muß, damit etwas von dieſem Waſſer, ſobald der Hahn K geöffnet iſt, in den Stiefel H hineinſpritze. Im Cylinder H iſt ein Kolben L, der auf und nieder gehen kann. Die Kolbenſtange LM beweget einen Hebel MN, der in O ſeine Unterlage hat. Das Ende N des Hebels beweget mittelſt der Stange NT einen ande-

änderen Kolben T einer Druckpumpe, welche vermittelſt der Röhre PQ das in die Höhe getriebene Waſſer in ein Gefäß R ergießt. Fig. 51

Die Maſchine wird folgender Weiſe in Bewegung gebracht. Unter dem Keſſel wird Feuer angemacht. Der Hahn C iſt anfänglich offen, der Hahn K aber wie auch der Hahn der Ableitungsröhre S verſchloſſen. Sobald das Waſſer anfängt zu kochen; ſo füllet es den Raum LH mit einem elaſtiſchen Dampfe, der den Kolben L in die Höhe treibet, folglich mittelſt des Hebels MN den Pumpenkolben NT niederdrücket, und das Waſſer zwinget in die Röhre PQ zu ſteigen.

Nun wird der Hahn C verſchloſſen, und der Hahn K geöffnet; ſo ſpritzet etwas Waſſer gerade durch den Dampf in H, und kühlet denſelben ab, ſo daß er in Waſſertropfen zuſammenfällt, und ſeine Schnellkraft verlieret. Sodann muß der Kolben L ſinken, es ſey nun durch den bloßen Druck der äußeren Luft, oder wenn dieſer nicht hinlänglich ſeyn ſollte, durch ein Uebergewicht am Hebelsarm OM; wo nun auch der Hahn in der Ableitungsröhre S ſich öffnet, und ſowohl das eingeſpritzte als auch das aus den Dämpfen niedergeſchlagene Waſſer abführet.

Jetzt wird dieſer Hahn in der Röhre S wie auch kurz ehevor der Hahn K wieder verſchloſſen, und C geöffnet. Und da das Waſſer immer fort ſiedet, ſo ſteiget neuer Dampf in H, und die Wirkung erfolget abermahls wie vorher. Das Waſſer ſteiget auf dieſe Art immer höher und höher in der Röhre PQ, und ergießt ſich zuletzt in den Behälter R, von wo man es hinleiten kann, wohin man will.

Das wechſelweiſe Eröffnen und Verſchließen der Hähne bewirket der auf- und niedergehende Hebel MN mittelſt eines eigenen künſtlichen Mechanismus, den man die Steuerung nennt. Dergleichen Steuerungen findet man auch bey der Waſſer-Säulmaſchine und bey der Luftmaſchine nach der ſinnreichen Erfindung des Hrn. Hell in den Ungariſchen Bergwerken, deren Beſchreibung man in ausführlicheren Lehrbüchern der Maſchinenkunde nachſchlagen kann.

Fig.

§. 151.

Unter den Waſſermaſchinen, welche das Waſſer auf eine geringe Höhe in großer Menge mit Vortheile heben, verdienet die von Archimed zu erſt angegebene und von ihm den Nahmen führende Archimediſche Waſſerſchraube wegen ihrer vorzüglichen Brauchbarkeit eine kurze Erwähnung.

Die Archimediſche Waſſerſchraube beſteht aus einer Welle, um welche eine bleyerne Röhre in Geſtalt einer Schraube herumgewunden iſt. Anſtatt der bleyernen Röhre wird auch öfters um die Welle mit dünnen Brettchen eine Art von Wendeltreppe gemacht, und dieſe an ihrem äußeren Umfange mit Brettern oder Faß-Dauben wie eine Tonne bedecket, ſo daß nur an jedem Ende eine hinlänglich weite Oeffnung belaſſen wird. Dieſe Maſchine wird in ſchiefer Lage zum Gebrauche aufgeſtellet, ſo daß der untere Theil unter Waſſer ſey, und darin mit ſeinem Zapfen in einer hinlänglich befeſtigten Pfanne umlaufen könne. Der obere Zapfen wird mittelſt einer Kurbel, oder aber mit einem daran geſteckten coniſchen Getriebe mittelſt eines Stirnrades herumgetrieben. Bey jeder Umdrehung tritt durch die untere Oeffnung eine gewiſſe Menge Waſſer in den hohlen Schraubengang ein; und dieſes Waſſer wird bey fortgeſetzter Umdrehung allmählig ſteigen, und ſich bey der oberen Oeffnung des Schraubenganges in den dazu vorgerichteten Behälter oder ferneren Ableiter ergießen, wenn die Maſchine ſchief genug gegen den Horizont geſtellet iſt; dergeſtalt nähmlich daß der Abweichungswinkel ihrer Achſe von der Vertical-Linie größer iſt, als die Neigung der Schraubengänge gegen den ſenkrechten Querſchnitt; wo ferner bey übrigens gleichen Umſtänden die mit jeder Umdrehung gehobene Waſſermenge deſto größer ſeyn muß; je größer der Unterſchied der zwey erwähnten Winkel iſt.

Will man die Kraft berechnen, welche zur Umwendung einer ſolchen Maſchine nöthig iſt; ſo ſtelle man ſie vor dem Gebrauche in diejenige geneigte Lage, die ſie im Waſſer bey dem Gebrauche bekommen ſoll, und gieße Waſſer von oben hinein, ſoviel ſie deſſelben behalten kann. Man richte ſo-

dann

dann die Maſchine ſenkrecht auf, und laſſe das darin enthaltene Waſſer in ein Gefäß ablaufen. Man wäge dieſes Waſſer, ſo hat man die abſolute Laſt, die gehoben werden ſoll. Dieſe abſolute Laſt multiplicire man mit dem Sinus des Neigungswinkels der Achſe der Schraube gegen den Horizont bey ihrem Gebrauche; ſo erhält man die relative Laſt, wie auf der ſchiefen Ebene. Da die Schraube mittelſt einer Kurbel, oder aber mittelſt eines angeſteckten Getriebes wie mittelſt eines gegebenen Hebelsarmes gedrehet wird, ſo berechne man den Umkreis des Cirkels für dieſen Hebelsarm als Halbmeſſer. Man meſſe auch die Höhe der Schraubenſtufen, das iſt die Entfernung der Schraubengänge nach einer zur Achſe der Schraubenwelle parallelen Richtung. Nun mache man folgende Regel Detri, um die Größe der Kraft zu bekommen, welche am Endpuncte des erwähnten Hebelsarmes angebracht der gefundenen Laſt das Gleichgewicht hält. Der Umkreis des Hebelsarmes der Kraft verhält ſich zur Stufenhöhe, wie die relative Laſt zur geſuchten Kraft. Fig.

Eigentlich müßte beym Abwägen des Waſſers derjenige Theil der Röhre, welcher unter Waſſer ſtehen ſoll, nicht mitgerechnet werden. Doch ſchadet es nicht ihn mitzurechnen, weil die daraus entſtehende Vergrößerung der Kraft bey der Bewegung als ein Uebergewicht dienen kann, ſo wie auch zur Ueberwindung der Reibung in den Zapfenlagern eine Vergrößerung der berechneten Kraft erforderlich iſt.

Inzwiſchen iſt die Reibung (dieſes gänzlich unvermeidliche Hinderniß der Maſchinen, welches das Ziel derjenigen, die eine immerwährende Bewegung, ein Mobile perpetuum, ſuchen, unerreichbar macht) bey der erwähnten Archimediſchen Waſſerſchraube weit geringer, als bey anderen zu eben derſelben Abſicht gebräuchlichen Waſſerkünſten, als z. B. Pumpwerken, Kaſtenkünſten, Schaufelwerken; und eben darum iſt jene dieſen vorzuziehen, da ſie dabey auch die Einfachheit damit verbindet: obwohl die Einfachheit der Zuſammenſetzung der verſchiedenen Theile einer Maſchine nicht jederzeit das untrügliche Kennzeichen ihres Vorzuges

Fig. vor anderen zu eben derſelben Abſicht dienenden Maſchinen iſt, wie es die angeführten kurzen Beſchreibungen der Dampfmaſchine nach der älteren und neueren Einrichtung, und noch deutlicher der ſinnreiche Strumpfwirkerſtuhl in Vergleichung mit den gewöhnlichen Stricknadeln, wie auch die künſtlich zuſammen geſetzten Bandmacherſtühle in Vergleichung mit den ordinären Webeſtühlen beſtätigen. Daraus wird es zugleich begreiflich, daß zuſammengeſetzte ordentlich eingerichtete Maſchinen da immer eine auffallend große Wirkung leiſten müſſen, wo ſie an die Stelle ſolcher einfacher Werkzeuge geſetzet werden, die vermöge ihrer Einrichtung zur Bewegung einen ganzen Menſchen erfordern, ob ſie ſchon zur Ueberwindung der eigentlichen Laſt vielleicht nur einige Lothe an Kraft nöthig haben; wie z. B. die zuſammengeſetzten Spinnmaſchinen in Vergleichung mit den gewöhnlichen Spinnrädern.

Vier-

Viertes Hauptſtück.

Von der Bewegung der feſten Körper in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel.

I. Abſchnitt.

Geradlinige Bewegung der feſten Körper in einer widerſtehenden flüſſigen Maſſe mit Beſeitigung der Schwerkraft.

§. 152.

Ein feſter Körper, der ſich in einer flüſſigen Materie beweget, dergleichen z. B. die Luft und das Waſſer iſt, kann nicht fortgehen, ohne die ihm im Wege liegenden Theilchen derſelben in Bewegung zu ſetzen. Aber eben dadurch muß ſeine Geſchwindigkeit in jedem Augenblicke vermindert werden. Die Elementar-Theilchen der flüſſigen Materie widerſtehen der Bewegung des in derſelben fortgehenden feſten Körpers beynahe eben ſo, wie ein feſter Körper der Bewegung eines andern widerſteht, der an ihn ſtößt. Durch einen ſolchen Widerſtand wird in einer gewiſſen Zeit dem bewegten Körper von ſeiner Geſchwindigkeit etwas entzogen. Der Erfolg iſt eben ſo, als wenn eine bewegende Kraft nach einer Richtung auf den feſten Körper wirkete, die der Richtung ſeiner Bewegung entgegen geſetzet iſt. Die Größe dieſes Widerſtandes, oder dieſer negativen bewegenden Kraft hänget von

Fig. von verſchiedenen Umſtänden ab. Erſtlich von der Dichtigkeit der flüſſigen Materie. Der Widerſtand iſt deſto größer, je größer dieſe Dichtigkeit iſt. Ein Körper leidet z. B. bey ſeiner Bewegung im Waſſer einen größeren Widerſtand, als bey einer ſolchen Bewegung in der Luft. Zweytens die Stärke des Widerſtandes richtet ſich nach der Größe und Geſtalt der Oberfläche des feſten Körpers, vorzüglich nach der Größe und Geſtalt desjenigen Theiles ſeiner Oberfläche, mit welchem er während der Bewegung gegen die Theilchen der flüſſigen Maſſe unausgeſetzt anſtößt. Drittens richtet ſich die Stärke des Widerſtandes nach der Geſchwindigket, womit ſich der feſte Körper in einer flüſſigen Maſſe beweget. Man ſieht leicht ein, daß bey einer größeren Geſchwindigkeit der Widerſtand größer ſeyn müſſe, als bey einer kleineren. Bey einer größeren Geſchwindigkeit werden nähmlich die anſtoßenden Theilchen der vorderen Oberfläche des bewegten Körpers an die vorliegenden Elementar-Theilchen der flüſſigen Maſſe gleichſam näher angerücket, und dadurch einer ſtärkeren Wirkung der Abſtoßungskräfte dieſer Elementar-Theilchen ausgeſetzet, als bey einer kleineren Geſchwindigkeit (3. Th § 59. Anmerk.). Deßwegen iſt der Widerſtand, welchen die vordere Oberfläche eines feſten Körpers bey ſeiner Bewegung in einem flüſſigen Mittel leidet, eine gewiſſe Function der Geſchwindigkeit. Dieſe Function werden wir bald kennen lernen.

§. 153.

Was im §. 109. der Stoß einer bewegten flüſſigen Maſſe gegen eine unbeweglich gehaltene feſte Fläche war, das iſt nun hier der Widerſtand, welchen eine bewegte feſte Fläche, oder die vordere Oberfläche eines bewegten feſten Körpers in einer als ruhend betrachteten flüſſigen Maſſe leidet. Der Druck zwiſchen einer feſten Fläche und zwiſchen den anliegenden Theilchen der flüſſigen Maſſe, welcher von der Abſtoßungskraft der Elementar-Theilchen der Materie entſteht, iſt nähmlich eben derſelbe; es bewege ſich entweder eine feſte Fläche nach einerley Richtung mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit in einer flüſſigen Maſſe; oder aber es werde

die

die Fläche unbeweglich gehalten, und die flüſſige Maſſe bewege ſich gegen dieſelbe nach eben derſelben Richtung mit eben derſelben Geſchwindigkeit. Fig.

Nun iſt im §. 109. gezeiget worden, wie man den Stoß einer flüſſigen Maſſe von gegebener Dichtigkeit bey einer gegebenen Geſchwindigkeit gegen eine gegebene Stoßfläche ausdrucken könne. Man kann daher auf eben dieſe Art auch den Widerſtand ausdrucken, welchen eben dieſelbe Fläche leidet, wenn ſie ſich mit einer eben ſo großen Geſchwindigkeit in eben derſelben flüſſigen Maſſe beweget.

§. 154.

Der ſenkrechte Stoß einer flüſſigen Maſſe gegen eine feſte Ebene iſt (§ 109.) gleich dem Gewichte eines Prisma der flüſſigen Maſſe, welches die Stoßfläche zur Grundfläche, und die Geſchwindigkeitshöhe des anſtoßenden Flüſſigen zur Höhe hat. Es iſt daher der Widerſtand, welchen eine feſte Ebene während ihrer Bewegung nach einer auf ihr ſenkrechten Richtung in einer flüſſigen Maſſe bey einer gegebenen Geſchwindigkeit in einem gegebenen Zeitpuncte leidet, dem Gewichte eines Prisma dieſer flüſſigen Maſſe gleich, welches die bewegte feſte Ebene zur Grundfläche, und die gegebene Geſchwindigkeitshöhe zu ſeiner Höhe hat.

Eben ſo iſt auch der Widerſtand, welchen ein gerades Prisma oder ein gerader Cylinder bey einer Bewegung nach der Richtung ſeiner Achſe in einer flüſſigen Maſſe in einem gegebenen Zeitpuncte bey einer gegebenen Geſchwindigkeit leidet, dem Gewichte eines Prisma dieſer Flüſſigkeit gleich, welches die Anſtoßfläche des bewegten Prisma zur Grundfläche, und die in dem gegebenen Zeitpuncte ſtatt findende Geſchwindigkeitshöhe zu ſeiner Höhe hat.

Der Widerſtand aber, welchen eine feſte Kugel bey ihrer Bewegung in einem flüſſigen Mittel in einem gegebenen Zeitpuncte bey einer gegebenen Geſchwindigkeit leidet, iſt (vermöge §. 117.) dem Gewichte eines Cylinders der flüſſigen Maſſe gleich, welcher den größten

Fig. ten Durchſchnitt einer ſolchen bewegten Kugel zur Grundfläche, und die Hälfte der im gegebenen Zeitpuncte ſtatt findenden Geſchwindigkeitshöhe zu ſeiner Höhe oder Länge hat.

Iſt nun D der Durchmeſſer einer gegebenen feſten Kugel, die ſich in einer flüſſigen Maſſe beweget,
q das eigenthümliche Gewicht dieſer Flüſſigkeit,
g wie bisher die Beſchleunigung der Schwere,
v die Geſchwindigkeit der bewegten Kugel in einem gegebenen Zeitpuncte während ihrer veränderlichen Bewegung, und
R der Widerſtand, welcher in dieſem Augenblicke bey der gegebenen Geſchwindigkeit die Bewegung verzögert; ſo iſt

$$R = \tfrac{1}{4} D^2 \pi . \frac{v^2}{8g} . q = \frac{\pi D^2 v^2 q}{32g}.$$

Wenn man z. B. eine bleyerne Kugel von $\frac{1}{2}$ Fuß im Durchmeſſer in einem tiefen mit Waſſer angefüllten Behälter durch das Waſſer gegen den Boden fallen läßt; ſo wird die Kugel wegen der Schwerkraft mit gleichförmig beſchleunigter Bewegung zu fallen trachten. Allein durch den Auftrieb, und durch den Widerſtand des Waſſers wird dieſe Bewegung verzögert, daß die Kugel nicht ſo ſchnell ſinket, als in freyer Luft. Nach einer gewiſſen Zeit ſey die Geſchwindigkeit der ſinkenden Kugel $v = 10$ Fuß; ſo iſt für $g = 15\frac{1}{2}$ Fuß, und für $q = 56\frac{1}{2}$ Pfund, in dieſem Augenblicke der Widerſtand $R = 8{,}94657$ Pfund, der mittelſt der angeführten Formel auf folgende Art gefunden wird.

Log. π =	0,4971499	Log. 4 =	0,6020600
Log. 100 =	2,0000000	Log. 32 =	1,5051500
Log. 56,5 =	1,7520484	Log. 15,5 =	1,1903317
	4,2491983		3,2975417
Subtr.	3,2975417		
	0,9516566;	die Zahl =	8,94657 Pf.

Es

Es werde nun eine eiſerne Kugel von ½ Fuß im Durchmeſſer aus einem Geſchützrohre mit einer angemeſſenen Pulverladung hinausgeſchoſſen; und ihre anfängliche Geſchwindigkeit, mit der ſie aus der Mündung des Geſchützrohres hinausfährt, ſey gleich 1500 Fuß. Dieſe Geſchwindigkeit wird durch den Widerſtand der Luft, als durch eine nach entgegengeſetzter Richtung wirkende Kraft nach und nach vermindert. In einem gewiſſen Puncte der Bahn, oder nach einer gewiſſen Zeit ſey die Geſchwindigkeit der Kugel nur noch = 1000 Fuß. Man fragt, wie groß wird in einem ſolchen Zeitpuncte der Widerſtand ſeyn, wenn die Luft, worin die Kugel fortſchießt, von der Beſchaffenheit iſt, daß 1 Kubikfuß von ihr 2 Loth wiegt? Dieſen Widerſtand findet man mittelſt der angeführten Formel für $D = \frac{1}{2}$, $v = 1000$, $g = 15,5$ Fuß, und für $q = 2$ Loth $= \frac{1}{16}$ Pfund durch folgende Rechnung Fig.

Log. π =	0,4971499	Log. 4 =	0,6020600
Log. $(1000)^2$ =	6,0000000	Log. 32 =	1,5051500
	6,4971499	Log. 15,5 =	1,1903317
Subtr.	4,5016617	Log. 16 =	1,2041200
	1,9954882		4,5016617

Hierzu gehöret die Zahl 98,9665;

der geſuchte Widerſtand iſt daher in einem ſolchen Falle ſo groß, als wenn in dem feſtgeſetzten Zeitpuncte die Kugel in ihrer Bewegung nach entgegen geſetzter Richtung von einer Kraft von 98,9665 Pfund gepreſſet würde.

§. 155.

Aus der angeführten Formel für den Widerſtand, den eine feſte Kugel bey ihrer Bewegung in einem flüſſigen Mittel leidet, laſſen ſich verſchiedene Folgerungen ableiten; als z. B.

1) **Bey Kugeln von gleichen Durchmeſſern, und bey verſchiedenen Geſchwindigkeiten ſind die Widerſtände in eben demſelben flüſſigen Mittel den quadrirten Geſchwindigkeiten proportional.**

Denn

Fig.

Denn es iſt (§. 154.) $R = \frac{\pi D^2 v^2 q}{32g}$; und für eine andere Geſchwindigkeit V iſt $R' = \frac{\pi D^2 V^2 q}{32g}$. Folglich $R : R' = v^2 : V^2$.

2) Bey gleichen Geſchwindigkeiten, und verſchiedenen Kugeln ſind die Widerſtände in eben demſelben flüſſigen Mittel den quadrirten Durchmeſſernn, oder den quadrirten Halbmeſſern, oder auch den Oberflächen der Kugeln proportional.

Denn aus $R = \frac{\pi D^2 v^2 q}{32g}$, und $R' = \frac{\pi \delta^2 v^2 q}{32g}$ folget $R : R' = D^2 : \delta^2 = (\frac{1}{2}D)^2 : (\frac{1}{2}\delta)^2 = D^2\pi : \delta^2\pi$.

3) Bey Kugeln von gleichen Durchmeſſern, und bey gleich großen Geſchwindigkeiten ſind die Widerſtände in flüſſigen Maſſen von verſchiedenen Dichtigkeiten, oder von verſchiedenen eigenthümlichen Gewichten, dieſen eigenthümlichen Gewichten proportional.

Denn aus $R = \frac{\pi D^2 v^2 q}{32g}$, und $R' = \frac{\pi D^2 v^2 Q}{32g}$, folget $R : R' = q : Q$.

§. 156.

Wenn ein ſchwimmender feſter Körper, der zum Theile aus dem Waſſerſpiegel hervorraget, z. B. ein beladenes Schiff in einem Canale, mit einer gegebenen Geſchwindigkeit fortbeweget werden ſoll; ſo iſt nebſt dem Widerſtande gegen die Oberfläche des vorderen Theiles auch noch derjenige hydroſtatiſche Druck zu überwinden, welcher daraus entſteht, daß während der Bewegung des Schiffes das Waſſer an dem vorderen Theile ſich etwas aufſtauet, am Hintertheile aber ſich etwas vertiefet. Wie nun in dergleichen Fällen der geſammte Widerſtand zu beſtimmen ſey, und wie die Figur des Schiffes beſchaffen ſeyn müſſe, damit der geſammte Widerſtand ein Kleinſtes ſey, gehöret eigentlich in die Schiffbaukunſt, mit der wir uns nicht beſchäftigen können.

nen. Hier ſoll nur von demjenigen Widerſtande die Rede Fig.
ſeyn, den feſte Körper, und zwar vorzüglich Kugeln bey ihrer Bewegung in einem flüſſigen Mittel zu leiden haben, wenn ſie darin ganz eingetauchet ſich befinden; als z. B. da eine geſchoſſene eiſerne Kugel, oder eine geworfene Bombe in der gewöhnlichen Luft ſich beweget.

Selbſt in der Beſtimmung des Widerſtandes welchen eine Kugel bey ihrer Bewegung in einem flüſſigen Mittel leidet, ſind die Schriftſteller nicht einig. Die meiſten ſetzen denſelben ſo groß, als er im §. 154. beſtimmet worden iſt; daß nähmlich der Widerſtand gegen eine Kugel dem Gewichte eines Cylinders der flüſſigen Maſſe gleich ſey, welcher die größte Kreisfläche der Kugel zur Grundfläche, und die halbe Geſchwindigkeitshöhe zu ſeiner Länge oder Höhe hat. Einige hingegen ſind der Meinung, daß man drey Viertheile der Geſchwindigkeitshöhe, zuweilen noch mehr für die Höhe des erwähnten Cylinders annehmen ſoll. Wenn die Bewegung der Kugel in einer flüſſigen Maſſe ſo ſchnell iſt, daß hinter der Kugel ein leerer Raum entſteht, weil die Theilchen der flüſſigen Maſſe ſich nicht ſo geſchwind ſchließen können, als die Kugel ausweichet: ſo iſt nebſt dem bisher erwähnten Widerſtande, den man den hydrodynamiſchen zu nennen pflegt, auch noch der hydroſtatiſche Druck zu überwinden, der von dem ungleichen Drucke der ſchweren flüſſigen Maſſe an der vorderen und hinteren Oberfläche der bewegten Kugel herrühret.

Bey der Bewegung der kugelförmigen Körper in der atmoſphäriſchen Luft, womit dieſe Unterſuchung ſich vorzüglich beſchäftigen ſoll, iſt ſelten die Geſchwindigkeit ſo groß, daß hinter der Kugel ein leerer Raum entſtehen könnte, weil die Luft mit einer Geſchwindigkeit von beynahe 1336 Wien. Fuß in einen leeren Raum einſtröhmet (§. 108.) Iſt aber die Geſchwindigkeit einer bewegten Kugel größer, als 1336 Wien. Fuß; ſo iſt allerdings der nach §. 154. beſtimmte Widerſtand noch um den Druck der Atmoſphäre zu vermehren, welchen die vordere Kugelfläche wegen des rückwärts entſtehenden leeren Raumes leidet. Dieſer Druck iſt gleich

Fig. gleich dem Gewichte einer Queckſilberſäule, welche die größte Kreisfläche der Kugel zur Grundfläche, und die an dem Orte der Bewegung ſtatt findende Barometerhöhe zu ihrer Höhe hat.

§. 157.

Aufgabe.

Eine feſte Kugel wird mit einer gegebenen Geſchwindigkeit in einer flüſſigen Maſſe in Bewegung geſetzet; man ſoll die Bewegung in der Vorausſetzung beſtimmen, daß die Schwerkraft aufgehoben, und außer dem Widerſtande der flüſſigen Maſſe ſonſt alle Hinderniſſe der Bewegung beſeitiget ſind.

Auflöſung.

1) Wenn die flüſſige Maſſe keinen Widerſtand äußerte; ſo würde, bey vorausgeſetzter Beſeitigung der Schwerkraft und aller übrigen Hinderniſſe, die Kugel in geradliniger Richtung immer mit gleichförmiger Bewegung fortgehen. Weil aber die flüſſige Maſſe der bewegten Kugel einen Widerſtand entgegenſetzet, der von der Geſchwindigkeit der Bewegung abhänget, und nach gerade entgegengeſetzter Richtung wirket; ſo wird dadurch die Geſchwindigkeit der Kugel bey der geradlinigen Bewegung beſtändig vermindert. Der Widerſtand iſt hier eine veränderliche Kraft, die nach gerade entgegen geſetzer Richtung die Geſchwindigkeit unausgeſetzt vermindert.

2) Es ſey nun D der Durchmeſſer der in einer flüſſigen Maſſe in Bewegung geſetzten Kugel, und ihr Gewicht oder ihre Maſſe ſey Nmahl ſo groß, als das Gewicht der flüſſigen Maſſe unter einem der Kugel gleichen Inhalte. Ferner ſey die anfängliche Geſchwindigkeit $= c$, womit die Kugel in der flüſſigen Maſſe in Bewegung geſetzet wird. Nachdem die Kugel nach einer gewiſſen Zeit $= t$ einen gewiſſen

wiſſen Weg $= x$ zurückgeleget hat, ſey ihre noch übrige Geſchwindigkeit $= v$ nach eben derſelben geradlinigen Richtung weiter fortzugehen. Im nächſt darauf folgenden Zeit = Elemente, oder Differenziale dt rücket die Kugel auf ihrem geradlinigen Wege um das Differenziale dx weiter fort, und die durch den Widerſtand der flüſſigen Maſſe verurſachte Verminderung der Geſchwindigkeit in einem ſolchen Zeit = Elemente iſt $= dv$. Fig.

3) Wenn man nun weiters den Widerſtand des flüſſigen Mittels, als eine verzögernde Kraft P, und die bewegte Maſſe M gehörig ausdrucket, ſo wird man mittelſt der allgemeinen Formeln der veränderlichen Bewegung

$$\left.\begin{array}{ll} \text{A)} & dv = \pm \frac{2gPdt}{M}. \\ \text{B)} & dx = vdt. \\ \text{C)} & vdv = \pm \frac{2gPdx}{M}. \\ \text{D)} & ddx = \pm \frac{2gPdt^2}{M}. \end{array}\right\} \text{(3. Th. §. 56.)}$$

hier, wie in allen übrigen Fällen, die Bewegung vollſtändig beſtimmen können.

4) Aus dem Differenziale dv der veränderlichen Geſchwindigkeit, und aus dem Differenziale dt der Zeit läßt ſich nähmlich die nach Verlauf der Zeit noch ſtatt findende Geſchwindigkeit $= v$ mittelſt der erſten Formel $dv = -\frac{2gPdt}{M}$ angeben, wenn man hier $P = \frac{1}{4}D^2\pi.\frac{v^2}{8g}$ (§. 154.), und $M = \frac{1}{6}D^3\pi N$ ſetzet für das eigenthümliche Gewicht der flüſſigen Maſſe $= 1$. Bringet man nun dieſe Werthe für P und M in die angeführte Gleichung; ſo erhält man, mit Beybehaltung des Zeichens $-$ wegen der entgegengeſetzten Richtung der bewegenden Kraft P, folgende Differenzial = Gleichung

Fig.

$$dv = -\frac{3v^2 dt}{8DN}$$

und ferner nach Abſonderung der veränderlichen Größen

$$dt = -\tfrac{4}{3}DN.2v^{-2}dv$$

Um dieſe Formel noch einfacher auszudrucken, ſey

$$\tfrac{4}{3}DN = a$$

$$\text{ſo iſt } dt = -2av^{-2}dv.$$

Hieraus folget durch die Integration

$$t = \text{Const.} + \frac{2a}{v}.$$

Es iſt aber für $t = 0$ die Geſchwindigkeit $v = c$; folglich $\text{Const.} = -\frac{2a}{c}$; und

$$\text{I. } t = 2a.\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right).$$

Hieraus folget ferner

$$\text{II. } v = \frac{2ac}{2a + ct}$$

$$\text{III. } c = \frac{2av}{2a - vt}.$$

Mittelſt der Formel I. läßt ſich für gegebene c, v, und $a = \frac{4}{3}DN$, die Zeit t berechnen, nach deren Verlauf die anfängliche Geſchwindigkeit c bis zu einer gegebenen Größe v abgenommen hat. Setzet man da $v = 0$, und ſuchet die dazugehörige Zeit t; ſo findet man t unendlich groß. Die Geſchwindigkeit eines bewegten feſten Körpers wird daher durch den Widerſtand der flüſſigen Maſſe niemahls gänzlich getilget, obſchon dieſelbe unausgeſetzt vermindert wird.

Durch die Formeln II. und III. kann man für eine gegebene Zeit $= t$, und für eine der zwey Geſchwindigkeiten, die im Anfange und zu Ende dieſer Zeit ſtatt finden; die andere Geſchwindigkeit berechnen.

5) Aus den in 2) feſtgeſetzten Bezeichnungen kann man nun auch mittelſt der in 3) angeführten allgemeinen Formel

$dx = vdt$ eine Gleichung ableiten, welche den Zuſammenhang der veränderlichen Geſchwindigkeit v mit dem zurückgelegten Wege x darſtellet. Wenn man nähmlich in dieſer allgemeinen Formel $dx = vdt$ für dt den Werth $dt = 2av^{-2}dv$ aus 4) ſetzet; Fig.

$$\text{ſo iſt } dx = -2av^{-1}dv = -2a.\frac{dv}{v}$$

daraus folget durch die Integration

$$x = \text{Const.} - 2a.\ \text{lognat}\ v$$

nun iſt für $x = 0$, die Geſchwindigkeit $v = c$;

$$\text{folglich Const.} = 2a.\ \text{lognat}\ c; \text{ und}$$

$$\text{IV. } x = 2a.\ \text{lognat}\frac{c}{v}.$$

Hieraus folget ferner, wenn man die Grundzahl des natürlichen logarithmiſchen Syſtemes mit h bezeichnet,

$$\frac{x}{2a}\ \text{lognat}\ h = \text{lognat}\frac{c}{v}$$

$$\text{folglich auch } h^{\frac{x}{2a}} = \frac{c}{v}; \text{ und endlich}$$

$$\text{V. } v = ch^{-\frac{x}{2a}}$$

$$\text{VI. } c = vh^{\frac{x}{2a}}.$$

Die Formeln IV. V. und VI. findet man auch, wenn man in der Grundformel C) in 3) für P und M die in 4) angegebenen Werthe ſetzet, und gehörig integriret.

Mittelſt der Formel IV. läßt ſich für gegebene $a = \frac{4}{3}DN$, für c und v der Weg x berechnen, an deſſen Endpuncte die anfängliche Geſchwindigkeit c bis zur Größe v abgenommen hat.

Durch die Formeln V. und VI. kann man für ein gegebenes x, und für die gegebene Geſchwindigkeit an dem einen Endpuncte dieſes Weges, die Geſchwindigkeit berechnen welche zu dem anderen Endpuncte desſelben Weges gehöret.

6) Um den Zuſammenhang zwiſchen dem zurückgeleg-

ten

Fig. ten Wege x, und zwiſchen der dazu verwendeten Zeit analytiſch auszudrucken, ſubſtituire man in IV. für v den Werth aus II; ſo iſt

$$\text{VII. } x = 2a \,.\, \text{lognat}\,(1 + \frac{ct}{2a})$$

$$\text{VIII. } t = \frac{2a}{c} \,.\, (h^{\frac{x}{2a}} - 1)$$

$$\text{IX. } c = \frac{2a}{t} \,.\, (h^{\frac{x}{2a}} - 1).$$

Mittelſt der Formel VII. findet man den Weg x, welcher in einer gegebenen Zeit t bey einer gegebenen anfänglichen Geſchwindigkeit c zurückgeleget wird. Umgekehrt aus x und c findet man t mittelſt der Formel VIII. Und endlich kann durch die Formel IX. die anfängliche Geſchwindigkeit c berechnet werden, damit bey einer ſolchen Bewegung in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel ein beſtimmter Weg x in einer beſtimmten Zeit t zurückgeleget werde.

§. 158.

Um die Formeln für die geradlinige Bewegung der feſten Körper in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel, bey Vernachläßigung der Schwerkraft und ſonſtigen Hinderniſſe, in einer bequemen Ueberſicht kurz beyſammen zu haben, werden dieſelben allhier in eben der Ordnung, wie ſie erwieſen wurden, wiederhohlet.

D Durchmeſſer der in Bewegung geſetzten feſten Kugel.

N die Zahl, welche anzeiget, wie vielmahl das Gewicht der feſten Kugel größer iſt, als das Gewicht der Flüſſigkeit unter einem der Kugel gleichen Inhalte. Man findet dieſe Zahl, wenn man die ſpecifiſche Schwere der Kugel durch die ſpecifiſche Schwere der Flüſſigkeit dividiret, worin die Bewegung geſchieht.

$a = \frac{4}{3} DN$,

c die anfängliche Geſchwindigkeit,

Fig.

x der zurückgelegte Weg,
t die dazu gehörige Zeit,
v die Geſchwindigkeit am Ende des Weges x nach Verlauf der Zeit t.

Bey dieſen Bezeichnungen iſt nun der Zuſammenhang zwiſchen.

A. Zeit und Geſchwindigkeiten.

$$\text{I. } t = 2a.\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right).$$

$$\text{II. } v = \frac{2ac}{2a+ct}.$$

$$\text{III. } c = \frac{2av}{2a-vt}.$$

B. Raum und Geſchwindigkeiten.

$$\text{IV. } x = 2a.\,\text{lognat}\,\frac{c}{v}.$$

$$\text{V. } v = ch^{-\frac{x}{2a}}.$$

$$\text{VI. } c = vh^{\frac{x}{2a}}.$$

C. Raum, Zeit, und anfängl. Geſchwindigkeit.

$$\text{VII. } x = 2a\,\text{lognat}\left(1 + \frac{ct}{2a}\right).$$

$$\text{VIII. } t = \frac{2a}{c}.\left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right).$$

$$\text{IX. } c = \frac{2a}{t}.\left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right).$$

Fig. **Anmerk.** Die angeführten Formeln ſind auch brauchbar, wenn der bewegte feſte Körper keine Kugel wäre, ſondern eine andere gegebene Geſtalt hätte, z. B. wenn er prismatiſch oder cylindriſch wäre. Nur müßte in einem ſolchen Falle der Werth des Buchſtaben a gehörig beſtimmet werden. Wenn z. B. ein gerader Cylinder von dem Durchmeſſer D und von der Länge L, nach der Richtung ſeiner Achſe in einem flüſſigen Mittel ſich fortbewegete; ſo wäre bey den (im §. 157.) feſtgeſetzten Bezeichnungen

$$dv = -\frac{2gPdt}{M} = -2gdt \times \tfrac{1}{4}D^2\pi.\frac{v^2}{4g} : \tfrac{1}{4}D^2\pi LN$$

$$= -\frac{2v^2dt}{4LN}; \text{ und ferner}$$

$$dt = -LN.2v^{-2}dv.$$

Vergleichet man nun dieſe Formel mit der im §. 157 in 4) befindlichen $dt = -2av^{-2}dv$; ſo ſieht man, daß alle dort durch die Integral-Rechnung gefundenen Formeln hier ihre Anwendung haben, wenn man hier $a = LN$ ſetzet.

Die bisher angeführten Formeln können auf die horizontale Bewegung der abgeſchoſſenen Kanonkugeln angewendet werden, in ſo weit ſolche bey dem ſo genannten Kernſchuße von der geradlinigen Bewegung nicht merklich abweichen. Wenn z.B. die Geſchwindigkeit einer 12pfündigen Kanonkugel, womit ſie aus der Mündung des Geſchützes hervorſchießt, von 1200 Wien. Fuß angenommen wird; ſo kann man finden, wie groß ihre Geſchwindigkeit nach der Zurücklegung eines horizontalen Weges von etwa 600 Fuß ſey, und wie viel Zeit zur Zurücklegung eines ſolchen Weges erfordert werde. Suchet man ferner zu dieſer berechneten Zeit, nach der Lehre des freyen Falles ſchwerer Körper, die zugehörige Höhe; ſo findet man dadurch, um wie viel beyläufig die abgeſchoſſene Kugel in der Weite von 600 Fuß durch die Schwerkraft von der anfänglichen horizontalen Richtung herabgeſunken iſt.

§. 159.

Fig.

§. 159.

Wenn die Geſchwindigkeit bey der bisher betrachteten geradlinigen Bewegung einer feſten Kugel in einem flüſſigen Mittel ſo groß iſt, daß hinter der Kugel ein leerer Raum übrig bleibet; ſo wird die Bewegung außer dem bisher in Erwägung gezogenen Widerſtande auch noch durch den hydroſtatiſchen Druck verzögert, welcher wegen des leeren Raumes gegen die vordere Oberfläche der Kugel entſteht. Dieſen hydroſtatiſchen Druck kann man durch das Gewicht einer Säule derjenigen Flüſſigkeit ausdrucken, worin die Bewegung geſchieht. Setzet man die Grundfläche einer ſolchen Säule dem größten Durchſchnitte der Kugel gleich, und ihre Höhe $= \alpha$; ſo iſt ſodann bey den übrigen feſtgeſetzten Bezeichnungen in der angeführten allgemeinen Formeln der Bewegung $P = \frac{1}{4}D^2\pi . \frac{v^2}{8g} + \frac{1}{4}D^2\pi . \alpha$, und $M = \frac{1}{6}D^3\pi N$. Suſtituiret man nun dieſe Werthe für P und M in der Formel $dv = - \frac{2gPdt}{M}$; ſo iſt $dv =$

$$- 2gdt . \frac{1}{4}D^2\pi \left(\frac{v^2}{8g} + \alpha\right) : \frac{1}{6}D^3\pi N$$

$$= - \frac{3(v^2 + 8\alpha g)dt}{8DN}$$

und ferner durch die Abſonderung

$$dt = - \frac{4}{3}DN \left(\frac{2dv}{8\alpha g + v^2}\right) = - 2a \left(\frac{dv}{8\alpha g + v^2}\right).$$

Dieſe Gleichung läßt ſich durch Beyhülfe der Kreisbogen integriren; welches aber zur Uebung und weiterer Ausführung dieſer Bewegung dem eigenen Fleiße überlaſſen wird.

§. 160.

Wenn der Cylinder, deſſen Gewicht bey der Bewegung einer Kugel in einem flüſſigen Mittel den Widerſtand ausdrucket, nicht die halbe Geſchwindigkeitshöhe zu ſeiner Länge hätte, ſondern dieſe Länge $k$mahl größer ſeyn ſollte, als ſie bisher feſtgeſetzet worden iſt; ſo werden die angeführten Formeln

Fig. meln (§. 158.) auch für einen ſolchen Fall brauchbar ſeyn, wenn man darin $a = \frac{\frac{4}{3}DN}{k}$ gelten läßt. Z. B. Für $k=1$ iſt $a=\frac{4}{3}DN$ wie oben (§. 158.); für $k=2$ iſt $a=\frac{2}{3}DN$; und für $k=1\frac{1}{3}$ iſt $a=DN$; u.ſ.w. Dieſe Erinnerung über die Feſtſetzung des Werthes von a erſtrecket ſich zugleich auf die folgenden Fälle der Bewegung feſter Körper in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel. Daß übrigens in den angeführten Formeln $a = \frac{\frac{4}{3}DN}{k}$ ſey, wenn der Widerſtand gegen eine Kugel bey der Bewegung in einem flüſſigen Mittel durch $P = \frac{1}{4}D^2\pi \cdot \frac{kv^2}{8g}$ ausgedrucket wird, erhellet aus der Vergleichung der Grundformeln der Bewegung für dieſen Fall mit dem oben angeführten Grundformeln für $P = \frac{1}{4}D^2\pi \cdot \frac{v^2}{8g}$.

II. Abſchnitt.

Lothrechte Bewegung der feſten Körper in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel.

§. 161.

Bey der lothrechten Bewegung der ſchweren Körper in einem widerſtehenden Flüſſigen Mittel ſind zwey Fälle zu unterſcheiden: nähmlich 1tens das lothrechte Sinken eines frey ausgelaſſenen, oder auch mit einer anfänglichen Geſchwindigkeit lothrecht abwärts geworfenen ſchweren Körpers; und

und 2tens das lothrechte Steigen eines mit einer gegebenen anfänglichen Geſchwindigkeit lothrecht aufwärts geworfenen oder geſchoſſenen ſchweren Körpers. Fig.

Beym Sinken ſowohl, als auch beym Steigen, in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel ſind drey Kräfte in Erwägung zu ziehen, welche auf die Bewegung Einfluß haben: nähmlich 1tens die Schwere, welche als eine unveränderliche Kraft ſenkrecht gegen die Erde herabwirket. 2tens der Auftrieb (§. 22.), welcher beym Sinken die Bewegung verzögert, und beym Aufſteigen beſchleuniget. 3tens der eigentliche Widerſtand der flüſſigen Maſſe, welcher die Bewegung verzögert.

Wenn beym Sinken eines ſchweren Körpers in einem flüſſigen Mittel die Geſchwindigkeit ſo groß iſt, daß der davon abhangende Widerſtand der flüſſigen Maſſe gegen die vordere Oberfläche des fallenden Körpers dem durch den Auftrieb verminderten Gewichte eines ſolchen Körpers gleich wird; ſo iſt es offenbar, daß ſodann die Geſchwindigkeit nicht mehr vergrößert werden kann, weil die bewegende Kraft nach der Richtung abwärts durch die gerade entgegengeſetzte Kraft des Widerſtandes gänzlich aufgehoben wird; dergeſtalt, daß das fernere Sinken des ſchweren Körpers eine gleichförmige Bewegung iſt.

§. 162.

Aufgabe.

Das Sinken, oder den Fall einer ſchweren Kugel in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel zu beſtimmen.

Auflöſung.

1) Da eine ſolche Bewegung von drey verſchiedenen Kräften abhänget (§. 161.); ſo wird man dieſelbe mittelſt der angeführten Grundformeln der Bewegung (§. 157. N. 3.) beſtim-

Fig. beſtimmen können, wenn man P und M in $dv = \frac{2gPdt}{M}$, oder auch $vdv = \frac{2gPdx}{M}$ gehörig ausdrucket, und ſodann die Gleichung integriret.

2) Es ſey nun D der Durchmeſſer der Kugel welche in einem flüſſigen Mittel von gleichförmiger Dichtigkeit dem lothrechten Falle überlaſſen wird. Das Gewicht der Kugel ſey Nmahl ſo groß, als das Gewicht der flüſſigen Maſſe unter einem mit der Kugel gleich großen Inhalte. In der Zeit t lege die Kugel einen Weg x zurück, und erlange nach Verlauf dieſer Zeit am Endpuncte des Weges x die Geſchwindigkeit v.

3) Im darauf folgenden Zeit-Elemente dt bey der Zurücklegung des Weges dx erlange die Geſchwindigkeit des ſinkenden Körpers den unendlich kleinen Zuwachs dv; ſo läßt ſich dieſes dv, und folglich auch v aus der Gleichung $dv = \frac{2gPdt}{M}$ beſtimmen, wenn man darin $M = \frac{1}{6}D^3\pi N$, und $P = \frac{1}{6}D^3\pi N - \frac{1}{6}D^3\pi - \frac{1}{4}D^2\pi . \frac{v^2}{8g}$ ſetzet. Es iſt nähmlich $M = \frac{1}{6}D^3\pi N$ die zu bewegende Maſſe; die bewegende Kraft P aber beſteht aus dem abſoluten Gewichte der Kugel $\frac{1}{6}D^3\pi N$, und aus dem nach entgegen geſetzter Richtung wirkenden Auftriebe $\frac{1}{6}D^3\pi$, und Widerſtande der flüſſigen Maſſe $\frac{1}{4}D^2\pi . \frac{v^2}{8g}$.

Es iſt daher $dv = \frac{2g(N-1)dt}{N} - \frac{3v^2dt}{8DN}$.

4) Um dieſe Differenzial-Gleichung kürzer auszudrucken, ſetze man $\frac{g(N-1)}{N} = \gamma$, und $\frac{4}{3}DN = a$ wie im §. 157 und 158. Dadurch wird γ die durch den Auftrieb verminderte Beſchleunigung der Schwere bedeuten.

Was

Was die Größe a bey der Bewegung in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel eigentlich vorſtellet, wird weiter unten zu erſehen ſeyn. Es iſt $a = \frac{4}{3}DN$ diejenige Geſchwindigkeitshöhe, bey welcher der Widerſtand einer flüſſigen Maſſe gegen eine feſte Kugel dem Gewichte der lezten gleich iſt. Fig.

5) Nach dieſer Bezeichnung iſt

$$dv = \frac{(4\gamma a - v^2)dt}{2a}, \text{ und}$$

$$dt = \frac{2a dv}{4\gamma a - v^2}$$

und ferner, wenn man den Bruch

$$\frac{1}{4\gamma a - v^2} = \frac{1}{(\sqrt{4\gamma a} - v)(\sqrt{4\gamma a} + v)}$$

nach den bekannten Regeln in zwey Brüche

$$= \frac{1}{4\sqrt{\gamma a}.(\sqrt{4\gamma a} + v)} + \frac{1}{4\sqrt{\gamma a}.(\sqrt{4\gamma a} - v)} \text{ zerleget}$$

$$dt = \frac{a}{\sqrt{4\gamma a}}\left(\frac{dv}{\sqrt{4\gamma a} + v}\right) + \frac{a}{\sqrt{4\gamma a}}\left(\frac{dv}{\sqrt{4\gamma a} - v}\right).$$

Hier kann man um die Gleichungen noch einfacher auszudrucken,

$$\sqrt{4\gamma a} = b$$

ſetzen. Was eigentlich $b = \sqrt{4\gamma a} = \sqrt{\frac{4ga(N-1)}{N}}$ bey dieſer Unterſuchung bedeute, wird weiter unten zu erſehen ſeyn. Und nun iſt

$$dt = \frac{a}{b}.\left(\frac{dv}{b+v} + \frac{dv}{b-v}\right)$$

daraus folget endlich durch die Integration

$$\text{I. } t = \frac{a}{b}.\text{lognat}\left(\frac{b+v}{b-v}\right)$$

wo Const. = o iſt, weil für $t = 0$ auch $v = 0$ iſt, wenn man annimmt, daß die Kugel nicht abwärts geworfen ſondern aus einer vollkommenen Ruhe der Wirkung der

Schwer-

Fig. Schwerkraft überlaſſen wird. Wenn hingegen die Kugel mit einer gegebenen anfänglichen Geſchwindigkeit c lothrecht abwärts geworfen würde; ſo wäre für $t = 0$ die Geſchwindigkeit $v = c$; daher $\text{Const.} = -\frac{a}{b} . \text{lognat} \left(\frac{b+c}{b-c}\right)$,

und $t = \frac{a}{b} . \text{lognat}\left(\frac{(b+v)(b-c)}{(b-v)(b+c)}\right)$.

6) Die gefundene Gleichung I. in 5) kann man auch auf folgende Art ſchreiben, worin h die Grundzahl des natürlichen logarithmiſchen Syſtems bedeutet,

$$\frac{bt}{a} . \text{lognat } h = \text{lognat} \left(\frac{b+v}{b-v}\right),$$

$$\text{und ferner } h^{\frac{bt}{a}} = \frac{b+v}{b-v}.$$

Hieraus folget nun

$$\text{II. } v = b . \left(\frac{h^{\frac{bt}{a}} - 1}{h^{\frac{bt}{a}} + 1}\right).$$

Mittelſt dieſer Formel II. findet man die Geſchwindigkeit v, welche eine ſchwere Kugel bey ihrem lothrechten Sinken in einem flüſſigen Mittel nach Verlauf der Zeit t erlanget. Umgekehrt findet man zu einer gegebenen Geſchwindigkeit v die dazu gehörige Zeit t mittelſt der Formel I.

Die Formel I. zeiget uns an, daß v immer kleiner ſeyn müſſe, als b; weil für $v > b$ nach dieſer Formel der Ausdruck für die Zeit durch den Logarithmen einer negativen Zahl angegeben würde, und daher unmöglich wäre.

Daß v immer kleiner ſeyn müſſe als b, zeiget noch deutlicher die Formel II., worin zwar v mit t wächſt, aber doch

doch dabey immer kleiner bleibt als b, weil Fig.

$$\frac{h^{\frac{bt}{a}} - 1}{h^{\frac{bt}{a}} + 1}$$ ein echter Bruch iſt.

7) Um zwiſchen dem zurückgelegten Wege x, und zwiſchen der erlangten Geſchwindigkeit v eine Gleichung zu finden, ſetze man nun in der zweyten Grundformel der Bewegung $dx = v dt$ (§. 157. N. 3.) ſtatt dt aus 5) den Werth $\frac{a}{b}\left(\frac{dv}{b+v} + \frac{dv}{b-v}\right) = \frac{2a\,dv}{b^2 - v^2}$; ſo erhält man

$$dx = \frac{2av\,dv}{b^2 - v^2} = -a.\frac{-2v\,dv}{b^2 - v^2}.$$

Hieraus folget durch die Integration

$$x = \text{Const.} - a.\,\text{lognat}(b^2 - v^2).$$

Nun iſt für $x = 0$ auch $v = 0$;
folglich Const. $= a.\,\text{lognat}\,b^2$; und

$$\text{III.}\quad x = a.\,\text{lognat}\left(\frac{b^2}{b^2 - v^2}\right).$$

Hieraus folget ferner $h^{\frac{x}{a}} = \frac{b^2}{b^2 - v^2}$, und

$$\text{IV.}\quad v = b.\sqrt{\left(1 - h^{-\frac{x}{a}}\right)}.$$

Dieſe Formeln III. und IV. findet man auch, wenn man in der dritten Grundformel der Bewegung $2v\,dv = \frac{4gP\,dx}{M}$ (§. 157. N. 3.) für P und M die in 3) angegebenen Werthe ſetzet, darauf die bemerkten Abkürzungen anbringet, und endlich gehörig integriret.

8) Endlich iſt es auch noch erforderlich eine Gleichung anzugeben, welche den Zuſammenhang zwiſchen dem zurückgelegten Wege x, und zwiſchen der dazu gehörigen Zeit vorſtellet. Man findet dieſe Gleichung auf folgende Art.

Man

Fig. Man ſetze in der Formel I. ſtatt v den Werth aus der Formel IV. ſo iſt

$$t = \frac{a}{b}.\,\text{lognat}\left(\frac{1+\sqrt{(1-h^{-\frac{x}{a}})}}{1-\sqrt{(1-h^{-\frac{x}{a}})}}\right)$$

und ferner, wenn man den Zähler und Nenner des letzten Bruches mit dem Zähler multipliciret, und gehörig reduciret,

$$\text{V. } t = \frac{x}{b} + \frac{2a}{b}.\,\text{lognat}\left[1+\sqrt{(1-h^{-\frac{x}{a}})}\right].$$

Aus dieſer letzten Gleichung folget ferner,

$$\text{VI. } x = bt + 2a.\,\text{lognat}\,\tfrac{1}{2}(1+h^{-\frac{bt}{a}}).$$

Man findet eben dieſen Ausdruck für x, wenn man in der Formel III. ſtatt v den Werth aus II. ſubſtituiret, und gehörig reduciret; oder welches einerley iſt wenn man aus der vorhergehenden Gleichung

$$t = \frac{a}{b}.\,\text{lognat}\left(\frac{1+\sqrt{(1-h^{-\frac{x}{a}})}}{1-\sqrt{(1-h^{-\frac{x}{a}})}}\right)$$

den Werth von x entwickelt. Man findet auf dieſe Art

$$x = a.\,\text{lognat}.\left[\frac{(h^{\frac{bt}{a}}+1)^2}{(h^{\frac{bt}{a}}+1)^2-(h^{\frac{bt}{a}}-1)^2}\right]$$

und ferner, wenn man im Nenner dieſer letzten Gleichung anſtatt der Differenz der zwey Quadrate das Product aus der Summe und aus der Differenz ihrer Wurzeln, ſetzet,

$x =$

$$x = a \,.\, \text{lognat}\left(\frac{h^{\frac{bt}{a}} + 1}{2h^{\frac{bt}{2a}}}\right).$$

welches nun ferner ſo, wie in VI. geſchrieben werden kann.

Die Formel V. und VI. findet man auch, wenn man in der zweyten Grundformel der Bewegung $dx = vdt$ für v den Werth aus IV. ſetzet, und die dadurch erhaltene Differenzial-Gleichung gehörig integriret.

Mittelſt der Formel V. kann man die Zeit t berechnen, binnen welcher eine gegebene Höhe x durch den lothrechten Fall einer Kugel in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel zurückgeleget wird. Umgekehrt findet man die Höhe x, wenn die Zeit t des Falles gegeben iſt, mittelſt der Formel VI.

§. 163.

Um die Formeln für das Fallen der ſchweren Körper in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel zur bequemen Ueberſicht kurz beyſammen zu haben, will ich dieſelben hier in der Ordnung, wie ſie erwieſen worden ſind, wiederhohlen. Es ſey nähmlich

D der Durchmeſſer einer Kugel,

N die Zahl, welche anzeiget, wie oft die ſpecifiſche Schwere der Flüſſigkeit, worin die Bewegung geſchieht, in der ſpecifiſchen Schwere der Kugel enthalten iſt,

$a = \frac{4}{3} DN$ eine Abkürzung,

g die Beſchleunigung der Schwerkraft,

$b = \sqrt{\frac{4ga(N-1)}{N}}$ eine Abkürzung,

x der durch den Fall zurückgelegte Weg,

t die Zeit, binnen welcher der Weg x zurückgeleget wird,

Fig. v die nach Verlauf der Zeit t am Ende des Weges x durch den Fall erlangte Geſchwindigkeit,

h die Grundzahl des natürlichen logar. Syſtems: ſo iſt der Zuſammenhang zwiſchen

A. Zeit und Geſchwindigkeit.

$$\text{I. } t = \frac{a}{b} \cdot \text{lognat}\left(\frac{b+v}{b-v}\right).$$

$$\text{II. } v = b \cdot \left(\frac{h^{\frac{bt}{a}} - 1}{h^{\frac{bt}{a}} + 1}\right).$$

B. Raum und Geſchwindigkeit.

$$\text{III. } x = a \cdot \text{lognat}\left(\frac{b^2}{b^2 - v^2}\right).$$

$$\text{IV. } v = b \cdot \surd\left(1 - h^{-\frac{x}{a}}\right).$$

C. Zeit und Raum.

$$\text{V. } t = \frac{x}{b} + \frac{2a}{b} \cdot \text{lognat}\left[1 + \surd\left(1 - h^{-\frac{x}{a}}\right)\right].$$

$$\text{VI. } x = bt + 2a \cdot \text{lognat}\,\tfrac{1}{2}\left(1 + h^{-\frac{bt}{a}}\right).$$

Anmerk. Wenn die ſpecifiſche Schwere der Flüſſigkeit, worin die Kugel lothrecht herabſinket, in Vergleichung der ſpecifiſchen Schwere der Kugel ſehr klein iſt; ſo kann in dem Ausdrucke $b = \frac{\surd 4ga(N-1)}{N}$ ohne merklichen Feh-

ler

ler $\frac{N-1}{N} = 1$ geſetzet werden. Es iſt alsdann $b = \sqrt{4ga}$; Fig.
und es bedeutet b eine durch den freyen Fall von der Höhe $a = \frac{4}{3}DN$ erlangte Geſchwindigkeit bey welcher der Widerſtand der Flüſſigkeit gegen eine darin bewegte Kugel ſo groß iſt, als das Gewicht der Kugel. Wenn z. B. eine eiſerne Kugel in der widerſtehenden Luft mit einer anfänglichen Geſchwindigkeit, deren Geſchwindigkeitshöhe $a = \frac{4}{3}DN$ wäre, in lothrechter Richtung abwärts geworfen würde; ſo wäre ſie gleich anfangs einem Widerſtande $= \frac{1}{4}D^2\pi . \frac{4}{3}DN . \frac{1}{2} = \frac{1}{6}D^3\pi N$ ausgeſetzet, und das Gewicht der Kugel wäre bey den feſtgeſetzten Bezeichnungen auch $= \frac{1}{6}D^3\pi N$. Es wäre daher in einem ſolchen Falle der Widerſtand der Luft dem Gewichte der Kugel gleich; und weil dieſe zwey gleichen Kräfte, Gewicht und Widerſtand, einander gerade entgegen geſetzet ſind: ſo würde die Kugel in ihrer fernern lothrechten Bewegung weder beſchleuniget, noch verzögert werden, ſondern müßte mit gleichförmiger Bewegung fortgehen, in ſo fern die Luft von gleichförmiger Dichtigkeit angeſehen werden kann.

Weil nun $a = \frac{4}{3}DN$ diejenige Geſchwindigkeitshöhe anzeiget, bey welcher der Widerſtand einer flüſſigen Maſſe dem Gewichte der darin bewegten Kugel gleich iſt; ſo hat man zuweilen dem Ausdrucke $a (= \frac{4}{3}DN$ bey einer Kugel, und $= LN$ bey einem Cylinder) den Nahmen, **Maß des Widerſtandes**, auch **Exponent des Widerſtandes**, beygeleget. Wenn die ſpecifiſche Schwere des bewegten Körpers in Vergleichung mit der ſpecifiſchen Schwere der Flüſſigkeit, worin die Bewegung vor ſich geht, nicht beſonders groß iſt; ſo iſt nicht $b = \sqrt{4ga}$, ſondern es iſt $b = \sqrt{\left(\frac{4ga(N-1)}{N}\right)}$ diejenige Geſchwindigkeit, bey welcher der Widerſtand einer flüſſigen Maſſe gegen einen darin ſinkenden feſten Körper ſo groß wird, als das Gewicht des feſten Körpers.

Dieſer

Fig.

Dieſer Ausdruck $b = \sqrt{(\frac{4ga(N-1)}{N})}$ iſt die Gränze, der ſich die immer wachſende Geſchwindigkeit eines fallenden Körpers in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel immer nähert, und dieſelbe doch niemahls erreichet, wie es ſchon (§. 162. N. 6.) erinnert worden iſt.

Man kann nach dieſer Formel $b = \sqrt{(\frac{4ga(N-1)}{N})}$ die Geſchwindigkeit berechnen, welche ein herabfallender Regentropfen eines gegebenen Durchmeſſers, z. B. von 1 Duodecimal-Linie, niemahls überſteiget, die Erhöhung der Wolke, aus welcher derſelbe herabfällt, möge wie immer groß ſeyn. Daraus wird man erſehen, wie nützlich der Widerſtand der Luft in ſolchen Fällen ſey; weil ſonſt die Geſchwindigkeit der Regentropfen bey der großen Höhe, von der ſie herabfallen, ſo beträchtlich anwachſen müßte, daß dieſelben für Thiere und Pflanzen eben ſo tödtlich würden, wie das durch die Kraft des Schießpulvers hinausgeſchoſſene Bleyſchrot.

§. 164.

Um die bisher vorgetragene Lehre von der Bewegung der feſten Körper in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel mit Erfahrungen zu vergleichen, folgen hier in nachſtehenden zwey Tafeln einige Verſuche, welche auf Newtons Veranlaſſung in den Jahren 1710 und 1719 zu London in der Paulus-Kirche angeſtellet worden ſind.

Man ließ aus einer Höhe von 220 Londner-Fuß gläſerne Kugeln, deren Gewicht und Durchmeſſer in den zwey erſten Spalten folgender Tabelle angemerket ſind, herabfallen, beobachtete die Zeit ihres Falles, und berechnete endlich aus dieſer beobachteten Zeit (nach der Formel VI. §. 163.) die dazu gehörige Höhe.

Ver-

Verſuche über das Sinken gläſerner Kugeln in der widerſtehenden Luft. Fig.

Gewichte der Kug.	Durchm. der Kug.	Beobachtete Zeit des Sinkens.		Berechnete Höhe.	
Londn G	Londn. Z.	Secund.	Tertien	Fuß	Zoll
510	5,1	8	12	226	11
642	5,2	7	42	230	9
599	5,1	7	42	227	10
515	5,0	7	57	224	5
483	5,0	8	12	225	5
641	5,2	7	42	230	7

Bey folgenden Verſuchen wurden Kugeln aus Schweins-blaſen angewendet. Man machte die Schweinsblaſen naß, und bließ hierauf, nachdem ſie vorher in die innere Höhlung einer hölzernen Kugelform gebracht wurden, Luft hinein. Dadurch wurden ſie gezwungen die Kugelgeſtalt anzunehmen, die ſie nach dem Austrocknen beybehielten. Dieſe Kugeln ließ man ſodann aus einer Höhe von 272 Londner-Fuß herabfallen, beobachtete die Zeit des Sinkens, und berechnete endlich zu dieſer Zeit die zugehörige Höhe (§. 163. VI.). Man bemerkte auf dieſe Art mit Vergnügen, daß die Lehre der Bewegung feſter Körper in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel mit der Erfahrung hinlänglich übereinſtimme, wie es aus beygefügter Tabelle erhellet.

Fernere Verſuche über das Sinken ſchwerer Kugeln in der widerſtehenden Luft aus einer Höhe von 272 Londner Fuß.

Gewichte der Kugel.	Durchm. der Kugeln.	Beobachtete Zeit des S.	Hieraus berechnete Höhe	
Gran	Zoll.	Secunden	Fuß	Zoll
128	5,28	19	271	11
156	5,19	17	272	1,05
137,5	5,3	18,5	272	7
97,5	5,26	22	277	4
99,125	5	21,125	282	0

Bey

Fig. Bey der Berechnung der Zahlen für die letzte Spalte iſt das Gewicht eines Londner Cubik-Zolles Waſſer in der Luft von $253\frac{1}{2}$ Gran, und die Luft 860mahl leichter oder dünner als Waſſer, angenommen worden. Die Beſchleunigung der Schwere g kann man beyläufig $=$ 16 Londner-Fuß ſetzen.

§. 165.

Aufgabe.

Die Bewegung einer mit einer gegebenen anfänglichen Geſchwindigkeit lothrecht in die Höhe geſchoſſenen Kugel zu beſtimmen.

Auflöſung.

1) Es ſey, wie bisher, der Durchmeſſer der Kugel $= D$, ihr Gewicht Nmahl ſo groß, als das Gewicht der atmoſphäriſchen Luft unter einem mit der Kugel gleichen Inhalte, und die anfängliche Geſchwindigkeit $= c$, mit welcher die Kugel lothrecht in die Höhe geſchoſſen wird. Nachdem die Kugel den Weg x in einer gewiſſen Zeit t zurückgeleget hat, ſey ihre Geſchwindigkeit $= v$, mit welcher ſie im folgenden Zeit Elemente dt den Weg dx weiter hinauf zurückleget, und dabey an ihrer Geſchwindigkeit dv verlieret.

2) Die am oberen Endpuncte des Weges x nach Verlauf der Zeit t widerſtehende Kraft P iſt das um den hydroſtatiſchen Auftrieb verminderte Gewicht der Kugel, und der eigentliche Widerſtand der Luft; nähmlich

$$P = \tfrac{1}{6}D^3\pi N - \tfrac{1}{6}D^3\pi + \frac{D^2\pi v^2}{32g}$$

und die zu bewegende Maſſe iſt

$$M = \tfrac{1}{6}D^3\pi N.$$

3) Setzet man nun dieſe Werthe für P und M in der Formel $dv = -\frac{2gPdt}{M}$ (§. 157. N. 3.); ſo iſt

$dv =$

$$dv = -\frac{2g(N-1)dt}{N} - \frac{3v^2 dt}{8DN}$$

und für $\frac{g(N-1)}{N} = \gamma$, $\frac{4}{3}DN = a$, iſt

$$dv = -2\gamma dt - \frac{v^2 dt}{2a} = -dt\left(\frac{4a\gamma + v^2}{2a}\right)$$

es iſt alſo auch

$$dt = -\frac{2a dv}{4a\gamma + v^2},$$

und ferner für $\sqrt{4a\gamma} = b = \sqrt{\frac{4ag(N-1)}{N}}$.

$$dt = -\frac{2a dv}{b^2 + v^2}.$$

Daraus folget durch die Integration

$$t = \text{Const} - \frac{2a}{b} . \text{Arc tang}\frac{v}{b}$$

nun iſt für $t = 0$ die Geſchwindigkeit $v = c$;

daher $\text{Const.} = \frac{2a}{b} . \text{Arc tang}\frac{c}{b}$; und

$$\text{I. } t = \frac{2a}{b} . \left(\text{Arc tang}\frac{c}{b} - \text{Arc tang}\frac{v}{b}\right).$$

4) Dieſe letzte Gleichung kann man auch ſo ſchreiben:

$\text{Arc tang}\frac{v}{b} = \text{Arc tang}\frac{c}{b} - \frac{bt}{2a}$, und

$$\frac{v}{b} = \text{Tang arc}\left[\text{Arc tang}\frac{c}{b} - \frac{bt}{2a}\right].$$

Folglich iſt

$$\text{II. } v = b . \text{Tang arc}\left[\text{Arc tang}\frac{c}{b} - \frac{bt}{2a}\right].$$

5) Um nun zwiſchen dem zurückgelegten Wege x, und zwiſchen der Geſchwindigkeit v in einem ſolchen Falle

Fig. die Gleichung zu finden, ſetze man in der allgemeinen Formel (§. 157. N. 3.) $v\,dv = -\frac{2gP\,dx}{M}$ für P und M die angeführten Werthe mit den feſtgeſetzten Abkürzungen, und integrire ſodann nach den bekannten Regeln. Man gelanget noch geſchwinder zu der geſuchten Gleichung, wenn man in der zweyten Grundformel der Bewegung $dx = v\,dt$ für dt den Werth $-\frac{2a\,dv}{b^2+v^2}$ aus 3) ſetzet. Es iſt ſodann

$$dx = -\frac{2av\,dv}{b^2+v^2}$$

daraus folget durch die Integration

$$x = \text{Const.} - a.\,\text{lognat}\,(b^2+v^2)$$

nun iſt für $x = 0$ die Geſchwindigkeit $v = c$; daher Const. $= a.\,\text{lognat}\,(b^2+c^2)$; und

$$\text{III. } x = a.\,\text{lognat}\,\left(\frac{b^2+c^2}{b^2+v^2}\right).$$

Daraus findet man ferner

$$\text{IV. } v = \sqrt{\left[h^{-\frac{x}{a}}(b^2+c^2) - b^2\right]}.$$

6) Um endlich auch zwiſchen x und t eine Gleichung zu finden, ſetze man hier in I. ſtatt v den Werth aus IV.; ſo iſt

$$\text{V. } t = \frac{2a}{b}.\left[\text{Arc tang}\frac{c}{b} - \text{Arc tang}\sqrt{\left(\frac{h^{-\frac{x}{a}}(b^2+c^2)-b^2}{b^2}\right)}\right]$$

$$\text{VI. } x = a.\,\text{lognat}\left[\left(1+\frac{c^2}{b^2}\right).\text{Cos}^2\text{arc}\left(\text{Arc tang}\frac{c}{b} - \frac{bt}{2a}\right)\right].$$

§. 166.

Zur Ueberſicht der Bewegung einer lothrecht in die Höhe geſchoſſenen Kugel werden hier die entwickelten Formeln wiederhohlet.

Für die bekannten Werthe, D, N, g, c,

$a =$

$$a = \tfrac{4}{3}DN,\ b = \sqrt{\frac{4ag(N-1)}{N}},$$ Fig.

hat man folgende

A. Gleichungen zwiſchen der Zeit t, und zwiſchen der Geſchwindigkeit v.

$$\text{I. } t = \frac{2a}{b}.(\text{Arc tang } \frac{c}{b} - \text{Arc tang } \frac{v}{b})$$

$$\text{II. } v = b.\text{Tang arc}[\text{Arc tang}\frac{c}{b} - \frac{bt}{2a}].$$

B. Gleichungen zwiſchen dem zurückgelegten Wege x, und zwiſchen der Geſchwindigkeit v.

$$\text{III. } x = a.\text{lognat}(\frac{b^2+c^2}{b^2+v^2})$$

$$\text{IV. } v = \sqrt{[h^{-\frac{x}{a}}(b^2+c^2) - b^2]}.$$

C. Gleichungen zwiſchen dem zurückgelegten Wege x, und zwiſchen der Zeit t.

$$\text{V. } t = \frac{2a}{b}.[\text{Arc tang}\frac{c}{b} - \text{Arctang}\sqrt{(\frac{h^{-\frac{x}{a}}(b^2+c^2)-b^2}{b^2})}]$$

$$\text{VI. } x = a.\text{lognat}[(1+\frac{c^2}{b^2}).\text{Cos}^2\text{arc}(\text{Arc tang}\frac{c}{b} - \frac{bt}{2a})].$$

§. 167.

Aus den Formeln im §. 166. laſſen ſich noch verſchiedene andere nützliche Gleichungen ableiten. Z. B.

1) Wenn man im §. 166 in der Formel III. bey der aufſteigenden Bewegung die Geſchwindigkeit $v = 0$ ſetzet; ſo

Fig. ſo erhält man für die ganze Höhe x, welche die Kugel zu erreichen vermögend iſt, folgende Gleichung

$$\text{I. } x = a \,.\, \text{lognat}\left(\frac{b^2 + c^2}{b^2}\right).$$

Hieraus folget die geſuchte anfängliche Geſchwindigkeit c, womit die Kugel lothrecht in die Höhe geſchoſſen werden müßte, um eine gegebene Höhe x zu erreichen; nähmlich

$$\text{II. } c = b \,.\, \sqrt{\left(h^{\frac{x}{a}} - 1\right)}.$$

2) Um die Zeit t zu finden, binnen welcher die anfängliche Geſchwindigkeit bey der aufſteigenden Bewegung gänzlich getilget wird, ſetze man im §. 166. in der Formel I. die Geſchwindigkeit $v = 0$; ſo iſt

$$\text{III. } t = \frac{2a}{b} \,.\, \text{Arc tang } \frac{c}{b}.$$

Hieraus folget ferner die geſuchte anfängliche Geſchwindigkeit c, womit die Kugel lothrecht in die Höhe geſchoſſen werden muß, daß dieſe Geſchwindigkeit gänzlich getilget werde; nähmlich

$$\text{IV. } c = b \,.\, \text{Tang arc } \frac{bt}{2a}.$$

3) Um endlich bey einer ſolchen aufſteigenden Bewegung zwiſchen der ganzen lothrechten Höhe $= x$, an deren oberen Endpuncte die anfängliche Geſchwindigkeit gänzlich getilget wird, und zwiſchen der dazu erforderlichen Zeit eine Gleichung zu finden, ſetze man hier in die Formel I. den Werth für c aus IV.; ſo erhält man

$$\text{V. } x = 2a \,.\, \text{lognat Sec arc} \frac{bt}{2a}$$

$$= -2a \,.\, \text{lognat Cos arc } \frac{bt}{2a}$$

$$\text{VI. } t = \frac{2a}{b} \,.\, \text{Arccos } h^{-\frac{x}{2a}}.$$

§. 168.

Fig.

Wird endlich das Steigen und Fallen durch gleichen Weg x mit einander verglichen; ſo erhält man folgende Formeln:

1) Bey der aufſteigenden Bewegung iſt (§. 167. I.) die ganze erreichte Höhe

$$x = a . \text{lognat}\left(\frac{b^2+c^2}{b^2}\right).$$

Da auf dieſer Höhe die anfängliche Geſchwindigkeit gänzlich getilget iſt; ſo fällt die Kugel durch eben dieſelbe Höhe x herab; und erlanget dadurch eine gewiſſe Geſchwindigkeit $= v$. Man hat ſodann (§. 163. III.)

$$x = a . \text{lognat}\left(\frac{b^2}{b^2-v^2}\right).$$

Es iſt daher $a . \text{lognat}\left(\frac{b^2}{b^2-v^2}\right) = a . \text{lognat}\left(\frac{b^2+c^2}{b^2}\right)$; hieraus folget

$$\text{I. } v = \frac{bc}{\sqrt{(b^2+c^2)}}$$

$$\text{II. } c = \frac{bv}{\sqrt{(b^2-v^2)}}.$$

Mittelſt der Formel I. findet man die Geſchwindigkeit v, mit welcher eine Kugel auf die Erde zurückfällt, wenn dieſelbe mit einer gegebenen anfänglichen Geſchwindigkeit c lothrecht in die Höhe geſchoſſen wird. Umgekehrt findet man c aus v mittelſt der Formel II.

2) Im §. 167. in der Formel II.

$$c = b . \sqrt{(h^{\frac{x}{a}} - 1)}$$

ſetze man ſtatt b den Werth aus §. 163. IV.

$$b = \frac{v}{\sqrt{(1 - h^{-\frac{x}{a}})}}$$

ſo

Fig. ſo erhält man folgende Gleichungen zwiſchen beyden Geſchwindigkeiten c, v, und zwiſchen der dazu gehörigen ganzen Höhe x,

$$\text{III. } \frac{c}{v} = h^{\frac{x}{2a}}$$

$$\text{IV. } x = 2a \,.\, \text{lognat} \frac{c}{v}.$$

3) Um die Zeit $= t$ des Herabſinkens einer mit einer gegebenen anfänglichen Geſchwindigkeit c lothrecht in die Höhe geſchoſſenen Kugel durch c ausgedrucket zu finden, ſetze man im §. 163. in der Formel I. $\tau = \frac{a}{b} . \text{lognat} (\frac{b+v}{b-v}) = \frac{a}{b} . [L(b+v) - L(b-v)]$ anſtatt v den hier in I. angeführten Werth $v = \frac{bc}{\sqrt{(b^2+c^2)}}$; ſo erhält man nach gehöriger Reduction

$$\text{V. } \tau = \frac{2a}{b} . \text{lognat} (\frac{c + \sqrt{(b^2+c^2)}}{b}).$$

4) Wenn man dieſen zuletzt gefundenen Ausdruck V. der Zeit des Fallens zu der Zeit des Steigens im §. 167. III. $t = \frac{2a}{b} .$ Arc tang $\frac{c}{b}$ hinzu addiret; ſo erhält man für die ganze Zeit $= T$ des Steigens und Fallens folgende Formel

$$\text{VI. } T = \frac{2a}{b} . [\text{Arc tang} \frac{c}{b} + \text{lognat} (\frac{c + \sqrt{(b^2+c^2)}}{b})].$$

Um dieſe Formel VI. einfacher auszudrucken, ſetze man $\frac{c}{b} = \text{Tang } 2\varphi$, ſo iſt $c = b . \text{Tang } 2\varphi$, und Arc tang $\frac{c}{b} = 2\varphi$. Dadurch erhält man

$T =$

Fig.

$$T = \frac{2a}{b} \cdot [2\phi + \text{lognat Tang}\ (45^\circ + \phi)]$$

$$\text{für}\ \frac{c}{b} = \text{Tang}\ 2\phi.$$

Für $c = b$. Tang 2φ iſt nähmlich $\frac{c + \sqrt{(b^2 + c^2)}}{b} =$

$$\text{Tang}2\varphi + \sqrt{(1 + \text{Tang}^2 2\varphi)} = \text{Tang}2\phi + \text{Sec}2\phi =$$

$$\text{Tang}2\varphi + \frac{1}{\text{Cos}2\phi} = \frac{\sin 2\varphi + 1}{\cos 2\phi} = \frac{\sin 2\varphi + \sin 90^\circ}{\cos 90^\circ + \cos 2\phi}$$

$$= \frac{2\sin(45^\circ + \varphi).\cos(45^\circ - \phi)}{2\cos(45^\circ + \phi).\cos(45^\circ - \phi)} = \text{Tang}\ (45^\circ + \varphi).$$

§. 169.

Nach der letzten Formel des vorigen §. 168 läßt ſich aus der beobachteten Zeit des Steigens und Fallens die anfängliche Geſchwindigkeit c einer lothrecht in die Höhe geſchoſſenen Kugel berechnen, wenn es erlaubet iſt die Luft bis zu derjenigen Höhe, welche die Kugel im Steigen erreichet, durchaus für gleichförmig dicht anzuſehen. Um nun c zu finden, müßte man in der angeführten letzten Formel für ϕ durch öfteres Verſuchen eine ſolche Kreisbogenlänge zu ſetzen trachten, daß der zweyte Theil der Gleichung

$$\frac{bT}{2a} = 2\phi + \text{lognat Tang}\ (45^\circ + \varphi)$$

dem erſten Theile gleich würde. Iſt nun der Bogen φ von dieſer Eigenſchaft gefunden; ſo hat man ſodann die geſuchte anfängliche Geſchwindigkeit $c = b$. Tang2φ.

Anmerk. Wenn der hydroſtatiſche Auftrieb einer feſten Kugel in einem flüſſigen Mittel größer iſt, als ihr abſolutes Gewicht; ſo wird dieſelbe in einer ſolchen Flüſſigkeit lothrecht in die Höhe ſteigen. Durch den Auftrieb wird ihre Bewegung beſchleuniget, durch das abſolute Gewicht aber, und durch den Widerſtand der Flüſſigkeit hingegen verzögert. Eine ſolche aufſteigende Bewegung läßt ſich eben ſo beſtimmen, wie das lothrechte Sinken ſchwerer Körper

in

Fig. in der widerſtehenden Luft (§. 162.). Dieſe Unterſuchung wird zur Uebung dem eigenen Fleiße der Leſer überlaſſen. Sie kann auf das lothrechte Steigen eines Luftballons angewendet werden, bis zu ſo großen Erhöhungen, daß die Luft noch durchaus von beynahe gleichförmiger Dichtigkeit angeſehen werden könne.

III. Abſchnitt.

Krummlinige Bewegung geworfener, oder geſchoſſener Körper in der widerſtehenden Luft.

§. 170.

Aufgabe.

Die Gleichung für die Bahn zu finden, welche ein mit einer gegebenen anfänglichen Geſchwindigkeit unter einem gegebenen Erhöhungswinkel abgeſchoſſene Kanon-Kugel in der widerſtehenden Luft beſchreibet.

Auflöſung.

1) Es ſey AMB Fig. 52. die Bahn, welche die Ku-
52 gel beſchreibet, wenn ſie unter einem gegebenen Erhöhungswinkel BAT mit einer gegebenen anfänglichen Geſchwindigkeit nach der Richtung AT geſchoſſen oder geworfen wird. Man ſetze

den Elevationswinkel BAT $= m$,
die Abſciſſe AP $= x$
.. Ordinate PM $= y$,
.. Bogenlänge AM $= z$

das

das Differenziale $Pp = MR = dx$ Fig. 52

.. .. .. $Rr = Mm = dy$

.. .. .. $Mr = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dz$;

D ſey der Durchmeſſer der Kugel; und

N die Zahl welche anzeiget, wie oft das Gewicht der Flüſſigkeit, worin die Bewegung geſchieht, unter einem mit der Kugel gleich großen Raumsinhalte in dem Gewichte der Kugel enthalten iſt; oder, welches einerley iſt, wie oft die ſpezifiſche Schwere der Flüſſigkeit in der ſpecifiſchen Schwere der Kugel enthalten iſt.

Nach dieſen Bezeichnungen iſt nun, wenn man das eigenthümliche Gewicht der Flüſſigkeit für die Einheit annimmt, die Maſſe der Kugel

$$M = \tfrac{1}{6} D^3 \pi N.$$

2) Die anfängliche Geſchwindigkeit, mit welcher die abgeſchoſſene Kugel aus der Mündung des Geſchützes nach der Richtung AT hinausfährt, ſey $= c$; in dem Puncte M aber ſey nach der Richtung der Tangente MS die Geſchwindigkeit $= v$;

ſo iſt in dieſer Richtungslinie von r gegen M der Widerſtand der flüſſigen Maſſe (vermöge §. 154.)

$$R = \tfrac{1}{4} D^2 \pi . \frac{v^2}{8g},$$

Hieraus findet man nach der Lehre von der Zerlegung der Kräfte mittelſt des Kräften-Parallelograms den Widerſtand nach horizontaler Richtung

$$R' = \tfrac{1}{4} D^2 \pi . \frac{v^2}{8g} . \frac{dx}{dz};$$

und den Widerſtand nach lothrechter Richtung

$$R'' = \tfrac{1}{4} D^2 \pi . \frac{v^2}{8g} . \frac{dy}{dz} + \tfrac{1}{6} D^3 \pi N.$$

Die verzögerende Kraft nach der lothrechten Richtung im Puncte der Bahn M beſteht nähmlich aus dem Widerſtande der

Fig. 52 der Luft nach dieſer Richtung $\frac{D^2 \pi v^2}{32g} \cdot \frac{dy}{dz}$, und aus dem Gewichte der Kugel $\frac{1}{6} D^3 \pi N$. Die Verminderung dieſes Gewichtes durch den hydroſtatiſchen Auftrieb kann hier gänzlich vernachläſſiget werden, weil der Gewichtsverluſt des Eiſens und Bleyes, woraus die geſchoſſenen Kugeln gewöhnlich beſtehen, in der Luft unmerklich iſt.

3) Aus den angeführten Werthen von R', R'' in N. 2. und von M in N. 1. folget nun weiters bey der Abkürzung $\frac{4}{3} DN = a$,

nach lothrechter Richtung $\frac{R''}{M} = \frac{v^2}{4ag} \cdot \frac{dy}{dz} + 1$,

nach wagrechter Richtung $\frac{R'}{M} = \frac{v^2}{4ag} \cdot \frac{dx}{dz}$.

Dieſe Werthe von $\frac{R'}{M}$, und von $\frac{R''}{M}$ wird man nun weiter unten in den Grundformeln der Bewegung für $\frac{P}{M}$ ſubſtituiren müſſen, um zu der geſuchten Gleichung der Bahn zu gelangen.

4) Nun ſetze man die Zeit $= t$, binnen welcher der Bogen AM beſchrieben wird, und die Geſchwindigkeit nach horizontaler Richtung $= u$, nach verticaler aber $= u'$; ſo hat man vermöge der zweyten Grundformel der Bewegung $dx = u dt$, und $dy = u' dt$, oder $u = \frac{dx}{dt}$, und $u' = \frac{dy}{dt}$. Hieraus folget durch die Differenzirung, weil man hier dt für unveränderlich anſehen, das iſt, die Zeit in unendlich viele gleiche Theile zertheilet gedenken kann

$$du = \frac{ddx}{dt}, \text{ und } du' = \frac{ddy}{dt}.$$

5)

5) Man ſetze in der erſten Grundformel der Bewegung $dv = -\frac{2gP\partial t}{M}$ anſtatt dv die in N. 4. bemerkten Ausdrücke $\frac{ddx}{dt}$, $\frac{ddy}{dt}$; und anſtatt $\frac{P}{M}$ die Werthe $\frac{v^2}{4ag}.\frac{dx}{dz}$, und $\frac{v^2}{4ag}.\frac{dy}{dz}+1$ nach horizontaler und verticaler Richtung aus N. 3; ſo erhält man folgende zwey Gleichungen: Fig. 52

$$\text{I. } ddx = -\frac{v^2dxdt^2}{2adz}$$

$$\text{II. } ddy = -\frac{v^2dydt^2}{2adz} - 2gdt^2.$$

6) Man multiplicire die Gleichung I. mit dy, und II mit dx; und ziehe ſodann die erſte von der zweyten ab; ſo iſt

$$\text{III. } dxddy - dyddx = -2gdxdt^2.$$

7) Es iſt wegen der zweyten Grundformel der Bewegung $v = \frac{dz}{dt}$, und $v^2 = \frac{dz^2}{dt^2}$. Subſtituiret man nun dieſen Werth v^2 in die Gleichung I; ſo iſt

$$\text{IV. } ddx = -\frac{dxdz}{2a}.$$

8) Im rechtwinkeligen Dreyecke MRr iſt $Mr^2 = MR^2 + Rr^2$, nähmlich $dz^2 = dx^2 + dy^2$, und $dz = dx(1+\frac{dy^2}{dx^2})^{\frac{1}{2}}$.

Man ſetze $\frac{dy}{dx} = p$; ſo iſt $dz = dx(1+p^2)^{\frac{1}{2}}$.

In eben demſelben Dreyecke verhält ſich

MR(dx : Rr(dy = 1 : tang RMr;

es

Fig.

es iſt daher $\tang RMr = \frac{dy}{dx} = p$;

das heißt p iſt die Tangente des Neigungswinkels, welchen die Berührungslinie MS der Bahn mit dem Horizonte im Puncte M einſchließt.

9) Aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = p$

folget $dy = pdx$,

und $ddy = dpdx + pddx$.

Dieſe Werthe für dy, und ddy ſetze man in die Gleichung III. ſo erhält man

$$\text{V. } dpdx = -2gdt^2.$$

In der Gleichung IV. aber ſubſtituire man ſtatt dz ſeinen Werth $dx(1+p^2)^{\frac{1}{2}}$ aus N. 8.; ſo iſt

$$\text{VI. } ddx = -\frac{dx^2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}{2a}.$$

10) Aus V. folget $dp = -\frac{2gdt^2}{dx}$

und aus VI. fließt $(1+p^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{2addx}{dx^2}$.

Man multiplicire dieſe zwey letzten Gleichungen mit einander; ſo erhält man endlich

$$\text{VII. } dp(1+p^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{4agdt^2 ddx}{dx^3}$$

Mittelſt dieſer höheren Differenzial-Gleichung VII. ließe ſich nun die Gleichung für die Bahn beſtimmen, wenn es möglich wäre dieſelbe ſo weit zu integriren, daß man zuletzt einen endlichen Ausdruck zwiſchen x und y erhielte. Die erſte Integration der Gleichung VII. kann zwar durch Logarithmen bewerkſtelliget werden. Allein um die ferneren Integrationen genau zu finden, ſind die bisher bekannten Hülfsmittel der Analyſis nicht zureichend. Man muß daher

bedacht

bedacht ſeyn die geſuchte Gleichung zwiſchen x und y durch eine Annäherung zu erhalten. Fig.

11) Um nun die Gleichung VII. durch eine Annäherung zu integriren, erwäge man, daß es bey den Kanonen nicht gebräuchlich iſt unter großen Elevationswinkeln zu ſchieſſen. Die größte gebräuchliche Elevation beym Ricoſchettiren erſtrecket ſich nicht über 15 Grade. Für ſolche Fälle iſt p, als die Tangente des Neigungswinkels der Richtungslinie der Kugel gegen den Horizont in verſchiedenen Puncten der Bahn immer ein kleiner Bruch; weil ſelbſt am Ende des niederſteigenden Aſtes der Bahn dieſer Winkel nicht viel größer wird, als der Elevationswinkel. Daher kann man in der Gleichung VII. den ſehr kleinen Bruch p^2 gänzlich weglaſſen. Man erhält ſodann

$$dp = 4ag dt^2 . dx^{-3} ddx.$$

Hieraus folget durch die Integration, weil hier dt unveränderlich iſt,

$$p = \text{Const.} - \frac{2ag dt^2}{dx^2}.$$

Nun iſt für $x = 0$ im Anfange der Bewegung $p = \tang m$, und die Geſchwindigkeit nach horizontaler Richtung $\frac{dx}{dt}$ iſt da $= c . \cos m$,

nähmlich $\frac{dt^2}{dx^2} = \frac{1}{c^2 \cos^2 m}$; es iſt daher

$$\tang m = \text{Const.} - \frac{2ag}{c^2 \cos^2 m},$$

$$\text{Const.} = \tang m + \frac{2ag}{c^2 \cos^2 m}, \text{ und}$$

$$\text{VIII. } p = \tang m + \frac{2ag}{c^2 \cos^2 m} - \frac{2ag dt^2}{dx^2}.$$

12) Man ſetze in VIII. den Werth für dt^2 aus V.; ſo erhält man

$\frac{dx}{a}$

Fig.

$$\frac{dx}{a} = \frac{dp}{p - \text{tang}\, m - \frac{2ag}{c^2 \cos^2 m}};$$

Hieraus folget durch die Integration

$$\frac{x}{a} = \text{Const.} + \text{lognat}\left(p - \text{tang}\, m - \frac{2ag}{c^2 \cos^2 m}\right).$$

Es iſt aber für $x = 0$, $p = \text{tang}\, m$; folglich

$$\text{Const.} = -\ \text{lognat}\left(-\frac{2ag}{c^2 \cos^2 m}\right); \text{ und}$$

$$\frac{x}{a} = \text{lognat}\left(1 + \frac{c^2 \sin m \cos m}{2ag} - \frac{pc^2 \cos^2 m}{2ag}\right).$$

Und ferner für die Grundzahl $= h$ des natürlichen logarithmiſchen Syſtems

$$\text{IX. } h^{\frac{x}{a}} = 1 + \frac{c^2 \sin m \cos m}{2ag} - \frac{pc^2 \cos^2 m}{2ag}.$$

13) Aus IX. folget

$$\frac{c^2 \cos^2 m}{2ag} . p = 1 - h^{\frac{x}{a}} + \frac{c^2 \sin m \cos m}{2ag},$$

und ferner, wenn man anſtatt p den Werth $\frac{dy}{dx}$ aus N. 9. ſubſtituiret,

$$\frac{c^2 \cos^2 m}{2ag} . dy = dx + \frac{c^2 \sin m \cos m}{2ag} . dx - dx h^{\frac{x}{a}}.$$

Wird dieſe Gleichung wieder integriret; ſo iſt

$$\frac{c^2 \cos^2 m}{2ag} . y = C + x + \frac{c^2 \sin m \cos m}{2ag} . x - ah^{\frac{x}{a}}.$$

Nun iſt für $x = 0$, auch $y = 0$, folglich $C = a$; und

$$\frac{c^2 \cos^2 m}{2ag} . y = a + x + \frac{c^2 \sin m \cos m}{2ag} . x - ah^{\frac{x}{a}}.$$

Hier-

Hieraus folget endlich die geſuchte Gleichung für die Bahn einer geſchoſſenen Kugel in der widerſtehenden Luft Fig.

$$X.\ y = x\,(\text{tang}\, m + \frac{2ag}{c^2\cos^2 m}) - \frac{2a^2 g}{c^2\cos^2 m}(h^{\frac{x}{a}} - 1).$$

§. 171.

Mittelſt der Formel X. läßt ſich nun zu jeder gegebenen Abſciſſe x die dazugehörige Ordinate y berechnen. Wenn man ferner in der dazugehörigen Differenzialgleichung (§. 170. N. 13.) $dy = 0$ ſetzet, daraus $h^{\frac{x}{a}}$ und x nach der bekannten Lehre vom Größten und Kleinſten ſuchet, und dieſe Werthe in der Gleichung X. ſubſtituiret; ſo findet man die größte Ordinate der Bahn, oder die Erhöhung des Scheitels über den Horizont, ſammt der dazugehörigen Abſciſſe, oder Schußweite des aufſteigenden Aſtes.

Es iſt nähmlich die zur größten Ordinate zugehörige Abſciſſe, oder die Schußweite des aufſteigenden Aſtes

$$x = a\,.\,\text{lognat}\,(1 + \frac{c^2\sin 2m}{4ag})$$

und die größte Ordinate, oder die Erhöhung des Scheitels der Bahn über den Horizont der Mündung des Geſchützes iſt

$$y = a\,.\,[-\text{tang}\, m + (\frac{c^2\sin 2m + 4ag}{2c^2\cos^2 m}) \times \text{lognat}\,(1 + \frac{c^2\sin 2m}{4ag})].$$

Dieſe letzte Formel erhält man, wenn man (im §. 170 X.) $a\,.\,L(1 + \frac{c^2\sin 2m}{4ag})$ für x, und für $h^{\frac{x}{a}}$ den damit zuſammen gehörigen Werth $(1 + \frac{c^2\sin 2m}{4ag})$ ſubſtituiret.

§. 172.

Fig.

§. 172.

Soll nun zu einer gegebenen Ordinate die dazu gehörige Abſciſſe x mittelſt der Gleichung X. im §. 170. berechnet werden; ſo kann man dieſer Gleichung folgende Geſtalt geben,

$$\text{I. } h^{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a}\left(1 + \frac{c^2 \sin 2m}{4ag}\right) = 1 - \frac{yc^2(1 + \cos 2m)}{4a^2 g}$$

und man muß nun durch öfteres Verſuchen für $\frac{x}{a}$ einen ſolchen Werth n ausfindig zu machen trachten, daß der erſte Theil der Gleichung dem zweyten Theile gleich wird. Dadurch findet man die geſuchte Schußweite $x = an$.

Die Tafel der Potenzen von h im 2ten Bande meiner logarithm. trigonometr. Tafeln Leipzig bey Weidmann 1797 kann hiebey mit Nützen und großen Vortheile gebrauchet werden. Wäre y eine gegebene Vertiefung unter dem Horizonte der Mündung des Geſchützes; ſo müßte y allhier in I. mit entgegen geſetztem Zeichen genommen werden.

Soll man nun mittelſt dieſer Gleichung I. die ganze horizontale Schußweite berechnen, welche die Kugel bey dieſen Umſtänden erreichet; ſo ſetze man $y = 0$; und man erhält ſodann nachſtehende

52 Formel zur Berechnung der ganzen horizontalen Schußweite AB

$$\text{II. } \left(h^{\frac{x}{a}} - 1\right) : \frac{x}{a} = 1 + \frac{c^2 \sin 2m}{4ag}.$$

Um nun mittelſt dieſer Gleichung für gegebene Werthe von

$a = \frac{4}{3} DN$

D = dem Durchmeſſer der Kugel oder Grenade,

N = der Zahl, welche anzeiget, wie oft das Gewicht der Luft unter einem mit der Kugel oder Grenade

Grenade gleich großen Inhalte im Gewichte der Fig.
letzen enthalten iſt,
c = der anfänglichen Geſchwindigkeit,
g = der Beſchleunigung der Schwere
m = dem Elevationswinkel

die ganze horizontale Schußweite x zu finden, trachte man wieder wie ehevor für $\frac{x}{a}$ durch Verſuchen einen ſolchen Werth ausſindig zu machen, daß der erſte Theil dieſer Gleichung dem zweyten Theile beynahe gleich wird. Wenn z. B. $\frac{x}{a} = n$ von einer ſolchen Beſchaffenheit iſt; ſo erhält man ſodann $x = an$.

Weiter unten iſt eine baliſtiſche Tafel beygefüget, welche für verſchiedene Werthe von $\frac{x}{a} = n$ die dazugehörigen Werthe von $(h^n - 1) : n$ enthält. Mittelſt dieſer Tafel iſt es nun ſehr leicht in jedem vorkommenden Falle aus der Gleichung II. den Werth für $\frac{x}{a}$ mit 4 bis 5 Ziffern genau zu finden, welches in der Ausübung jederzeit zureichend iſt. Nun ſuche man aus der Gleichung II. den Werth für c ſo erhält man folgende

Formel zur Berechnung der anfänglichen Geſchwindigkeit aus der bekannten horizontalen Schußweite x, und aus a, g, m,

$$\text{III. } c = \sqrt{\left[\left(h^{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a} - 1\right) . \frac{4a^2 g}{x \sin 2m}\right]}.$$

Endlich ſuche man aus dieſer letzten Gleichung den Werth für m; ſo erhält man folgende

Fig. Formel zur Berechnung des Elevationswinkels zu einer gegebenen horizontalen Schußweite x, für bekannte a, c, g,

$$\text{IV. } \sin 2m = (h^{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a} - 1) . \frac{4a^2 g}{c^2 x}.$$

Aus der Gleichung I. kann man auch nachſtehende Formel ableiten, wodurch man die anfängliche Geſchwindigkeit c aus gegebenen x, y, a, g, m berechnen kann;

$$\text{V. } c = \sqrt{[(h^{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a} - 1) \times \frac{4a^2 g}{x \sin 2m - y(1 + \cos 2m)}]}$$

Iſt y eine gegebene Vertiefung unter dem Horizonte der Mündung des Geſchützes in der bekannten horizontalen Entfernung x, iſt nähmlich y eine negative Ordinate; ſo muß man hier in V. ſo wie oben in I. bey y das Zeichen $-$ in $+$ verwandeln.

Suchet man endlich aus §. 170. IX. den Werth für p; ſo erhält man

$$\text{VI. } p = \tan m - \frac{2ag}{c^2 \cos^2 m}(h^{\frac{x}{a}} - 1)$$

eine Formel, wodurch man für jede Abſciſſe x die Tangente des Neigungswinkels der Bahn gegen den Horizont berechnen kann. Man findet dadurch den Neigungswinkel, unter welchem der niederſteigende Aſt der Bahn den Horizont der Mündung des Geſchützes durchſchneidet, wenn man in dieſer letzten Formel für x die ganze nach der Formel II. berechnete Schußweite ſubſtituiret.

§. 173.

In der Gleichung VII. §. 170. iſt p^2 gänzlich vernachläſſiget worden, damit man durch dieſe Annäherung alle folgende Differenzial-Gleichungen integriren konnte. Will man nun eine etwas genauere Annäherung haben; ſo ſetze man in dieſer Gleichung anſtatt p den unveränderlichen Werth $\tan \frac{1}{2} m$. Man kann dieſes aus folgendem Grunde

thun

thun. Bey dem Anfange der Bewegung iſt $p = \text{tang} m$; Fig.
von da an nimmt p immer ab, je näher die Kugel dem Scheitel der krummen Linie kommt. Da wird $p = 0$. Sodann fängt p wieder zu wachſen an, und wird negativ; welches man aber hier nicht zu erwägen braucht, weil p^2 immer poſitiv iſt. In irgend einem Puncte des niederſteigenden Aſtes der Bahn wird wieder $p^2 = \text{tang}^2 m$. Man kann daher ohne großen Fehler für p den mittleren Werth zwiſchen $p = \text{tang} m$, und zwiſchen $p = 0$ annehmen; und daher $p = \text{tang} \frac{1}{2} m$ ſetzen.

Bey dieſer Annäherung $p = \text{tang} \frac{1}{2} m$ in der Formel VII. §. 170. iſt nun

$$dp\,(1 + \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} m)^{\frac{1}{2}} = 4agdt^2 . dx^{-3} ddx,$$

oder wegen $(1 + \text{tang}^2 \frac{1}{2} m) = \sec^2 \frac{1}{2} m = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} m}$ iſt

$$dp = 4(a \cos \tfrac{1}{2} m) g dt^2 . dx^{-3} ddx.$$

Die fernere Behandlung dieſer Differenzial-Gleichung um nach mehreren Integrationen die geſuchte Gleichung für die Bahn der geſchoſſenen Kugel zu finden, iſt völlig eben dieſelbe, wie im §. 170. von N. 11. angefangen: mit dem einzigen Unterſchiede, daß man überall $a \cos \frac{1}{2} m$ anſtatt a ſetzen muß. Es iſt nähmlich bey dieſer Annäherung.

I. Gleichung für die Bahn,

$$y = x\left(\text{tang} m + \frac{2ag\cos \frac{1}{2} m}{c^2 \cos^2 m}\right) - \frac{2a^2 g \cos^2 \frac{1}{2} m}{c^2 \cos^2 m}\left(h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}} - 1\right).$$

II. Formel zur Berechnung der ganzen Schußweite.

$$\left(h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}} - 1\right) : \frac{x}{a \cos \frac{1}{2} m} = 1 + \frac{c^2 \sin 2m}{4ag \cos \frac{1}{2} m}.$$

Fig.

Bey der Berechnung der Schußweite kann auch hier die am Ende beygefügte baliſtiſche Tafel mit großem Vortheile gebrauchet werden; denn wenn man durch Beyhülfe dieſer Tafel für $\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}$ einen ſolchen Werth n gefunden hat, daß er der Gleichung ein Genüge leiſtet, ſo iſt ſodann die geſuchte Schußweite $x = n \times a\cos\frac{1}{2}m$.

III. Formel zur Berechnung der anfänglichen Geſchwindigkeit aus der Schußweite,

$$c = \sqrt{\left[\left(h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}} - \frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m} - 1\right) \times \frac{4a^2 g\cos^2\frac{1}{2}m}{x\sin 2m}\right]}$$

IV. Formel zur Berechnung des Elevationswinkels zu einer gegebenen Schußweite,

$$\sin 2\mu = \left(h^{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a} - 1\right) \cdot \frac{4a^2 g}{c^2 x},$$

$$\sin 2m = \left(h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}\mu}} - \frac{x}{a\cos\frac{1}{2}\mu} - 1\right) \cdot \frac{4a^2 g\cos^2\frac{1}{2}\mu}{c^2 x}.$$

Man muß nähmlich bey der Berechnung des Elevationswinkels m zu erſt den beyläufigen Werth desſelben $= \mu$ nach der Formel IV. (§. 172.) beſtimmen, und ſodann dieſen beyläufigen Werth für μ hier in der letzten Gleichung ſubſtituiren. Dadurch wird der geſuchte Winkel m meiſtens mit zureichender Genauigkeit gefunden; wovon man ſich überzeugen kann, wenn man dieſen ſo gefundenen Werth m noch einmahl im zweyten Theile der letzten Gleichung für μ ſubſtituirt.

V. Formel zur Berechnung der anfänglichen Geſchwindigkeit aus der Abſciſſe und Ordinate

Fig.

$$c = \sqrt{\left[\left(h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}} - \frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m} - 1\right) \times \frac{4a^2 g\cos^2\frac{1}{2}m}{x\sin 2m - y(1+\cos 2m)}\right]}$$

VI. Formel zur Berechnung der horizontalen Schußweite x, welche mit einer gegebenen Erhöhung $+y$, oder Vertiefung $-y$ zuſammen gehöret,

$$h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}} - \frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}\left(1 + \frac{c^2\sin 2m}{4ag\cos\frac{1}{2}m}\right)$$

$$= 1 \mp \frac{yc^2(1+\cos 2m)}{4a^2 g\cos^2\frac{1}{2}m}.$$

VII. Formel zur Berechnung des Neigungswinkels ϕ der Bahn gegen den Horizont aus der Schußweite x. Wenn man nähmlich $p = \text{tang}\,\phi$ ſetzet, ſo iſt

$$\text{tang}\,\phi = \text{tang}\,m - \frac{2ag\cos\frac{1}{2}m}{c^2\cos^2 m}.\left(h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}} - 1\right).$$

VIII. Formel zur Berechnung der Schußweite x des aufſteigenden Aſtes,

$$x = a\cos\tfrac{1}{2}m \times \text{lognat}\left(1 + \frac{c^2\sin 2m}{4ag\cos\frac{1}{2}m}\right).$$

IX. Formel zur Berechnung der größten Ordinate, oder der Erhöhung des Scheitels der Bahn über den Horizont der Mündung des Geſchützes,

$y =$

Fig.

$$y = a\cos\tfrac{1}{2}m[-\tan g m + (\frac{c^2\sin 2m + 4ag\cos\tfrac{1}{2}m}{2c^2\cos^2 m})$$

$$\times \text{lognat}(1 + \frac{c^2\sin 2m}{4ag\cos\tfrac{1}{2}m})].$$

§. 174.

Die Länge des Bogens AM $= z$ läßt ſich auf folgende Art genau berechnen. Aus der Gleichung (§. 170 VII).

$$dp(1+p^2)^{\frac{1}{2}} = 4ag\,dt^2.dx^{-3}ddx$$

folget durch die Integration

$$\text{I. } C + \tfrac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}L[p+(1+p^2)^{\frac{1}{2}}] = -\frac{2ag\,dt^2}{dx^2}$$

Nun iſt für $x = 0$ im Anfange der Bewegung, $p = \tan g m$, und $\frac{dt^2}{dx^2} = \frac{1}{c^2\cos^2 m}$; daher iſt

$$\text{Const.} = -\frac{2ag}{c^2\cos^2 m} - \tfrac{1}{2}\tan g m.(1+\tan g^2 m)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\tfrac{1}{2}\text{lognat}[\tan g m + (1+\tan g^2 m)^{\frac{1}{2}}]$$

und ferner wegen $(1 + \tan g^2 m)^{\frac{1}{2}} = \sec m = \frac{1}{\cos m}$,

$$\tan g m + \frac{1}{\cos m} = \frac{\sin m + 1}{\cos m} = \frac{\sin 90^\circ + \sin m}{\cos 90^\circ + \cos m}$$

$$= \tan g(45^\circ + \tfrac{1}{2}m), \text{ iſt}$$

$$\text{II. Const} = -\frac{2ag}{c^2\cos^2 m} - \frac{\sin m}{2\cos^2 m} - \tfrac{1}{2}L.T.(45^\circ + \tfrac{1}{2}m)$$

Man ſubſtituire hier in der Gleichung I. den Werth für dt^2 aus (§. 170. V.); ſo iſt

$$dx = \frac{a\,dp}{C + \tfrac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}L[p+(1+p^2)^{\frac{1}{2}}]},$$

und wegen (§. 170. N. 8) $dz = dx\,(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}$ iſt

dx=

Fig.

$$dx = \frac{dz}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}};$$

folglich iſt auch

$$dz = \frac{a\,dp(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}{C+\frac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}L[p+(1+p^2)^{\frac{1}{2}}]}.$$

Hieraus folget durch die Integration, weil im Nenner dieſes Bruches das vollſtändige Integrale des Zählers $dp(1+p^2)^{\frac{1}{2}}$ enthalten iſt,

$$z = C' + aL[C+\tfrac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}L(p+(1+p^2)^{\frac{1}{2}})]$$

Nun iſt für $z = 0$ im Anfange der Bewegung $p = \text{tang}\,m$; folglich

$$C' = -aL[C + \frac{\sin m}{2\cos^2 m} + \tfrac{1}{2}L.T.(45^\circ+\tfrac{1}{2}m)],$$ und

$$z = aL\left[\frac{C+\frac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}L[p+(1+p^2)^{\frac{1}{2}}]}{C+\frac{\sin m}{2\cos^2 m}+\frac{1}{2}L.\,T.\,(45^\circ+\frac{1}{2}m)}\right]$$

ferner, wenn man für C den hier in II. angemerkten Werth ſetzet, und alles gehörig reduciret

$$z = a.L\left\{1+\frac{c^2\cos^2 m}{4ag}\left[\frac{\sin m}{\cos^2 m}+L.\,T.\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}m) - p(1+p^2)^{\frac{1}{2}} - L\,(p+(1+p^2)^{\frac{1}{2}})\right]\right\}.$$

Um dieſe letzte Gleichung noch einfacher auszudrucken, ſetze man $p = \text{tang}\,\varphi$, nähmlich man bezeichne den veränderlichen Winkeln mit φ, unter welchem die Tangente der Bahn, oder die Richtung der bewegten Kugel in verſchiedenen Puncten ihres Weges gegen den Horizont geneigt iſt; ſo erhält man

$$\text{III.}\quad z = a.L\left\{1+\frac{c^2\cos^2 m}{4ag}\left[\frac{\sin m}{\cos^2 m}+L.\,T.\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}m) - \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - L.\,T.\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\varphi)\right]\right\}.$$

Setzet

Fig. Setzet man nun in dieſer Formel $\varphi = m$, ſo iſt $z = o$; ſetzet man aber $\phi = o$, ſo iſt

$$z = a \,.\, L\left[1 + \frac{c^2 \sin m}{4ag} + \frac{c^2 \cos^2 m}{4ag}\, L.\, T.\, (45^\circ + \tfrac{1}{2} m)\right]$$

die Länge des aufſteigenden Aſtes der Bahn von der Mündung des Geſchützes bis zum Scheitel, wo die Richtung der bewegten Kugel horizontal wird.

Für $\phi = - m$ in der Formel III. iſt

$$z = a \,.\, L\left[1 + \frac{c^2 \sin m}{2ag} + \frac{c^2 \cos^2 m}{4ag} \,.\, L\left(\frac{\tan g(45^\circ + \tfrac{1}{2} m)}{\tan g(45^\circ - \tfrac{1}{2} m)}\right)\right]$$

die Länge des Bogens der Bahn von der Mündung des Geſchützes über den Scheitel hinunter bis zu dem Puncte des niederſteigenden Aſtes, wo die Neigung der Tangente der Bahn gegen den Horizont eben ſo groß iſt, als die anfängliche Richtung der geſchoſſenen Kugel.

§. 175.

Mittelſt der Formel III. §. 174. kann man für jeden Elevationswinkel m, und für gegebene a und c die ganze horizontale Schußweite, und die größte Ordinate, oder die Erhöhung des Scheitels der Bahn über den Horizont der Mündung des Geſchützes berechnen, und zwar auf folgende Art.

1) Man zertheile den gegebenen Elevationswinkel m in ſo viele kleine gleiche Theile, etwan in einzelne Grade, oder auch von 2 zu 2 Grad $= e$, daß die Länge des Bogens der Bahn zwiſchen jeden zwey Neigungswinkeln der Tangenten bey dem kleinen Unterſchide e ohne merklichen Fehler für eine gerade Linie angeſehen werden könne. Nun ſetze man in der Formel III. §. 174 nacheinander $\varphi = m - e$, $\varphi = m - 2e$, $\phi = m - 3e$, u. ſ. w. bis $\varphi = o$; und berechne für jeden ſolchen Werth ϕ und für die übrigen gegebenen Größen die dazugehörige Länge z.

2) Sodann ziehe man in dieſer Reihe der Bogenlängen jedes vorhergehende Glied von dem nächſt darauf folgenden ab, und bezeichne dieſe Differenzen mit α, β, γ, δ, ε, u. ſ. w.; ſo erhält man dadurch die Längen der Bogen der

Bahn

Bahn zwiſchen den dazu gehörigen Neigungswinkeln der Tangenten; nähmlich man erhält in Fig. 53. die Bogenlänge α zwiſchen den Neigungswinkeln m und $m - e$, β zwiſchen $m - e$ und $m - 2e$, γ zwiſchen $m - 2e$ und $m - 3e$, δ zwiſchen $m - 3e$ und $m - 4e$ u. ſ. w. Fig. 53

3) Dieſe ſo gefundenen Längen α, β, γ, δ, .. kann man für geradlinige Hypothenuſen von rechtwinkeligen Dreyecken anſehen, bey denen die Hypothenuſen gegen die horizontalen Katheten oder Grundlinien unter den Winkeln $m - e$, $m - 2e$, $m - 3e$, $m - 4e$, .. geneigt ſind. Aus dieſen Längen der Bogenſtücke, und aus den dazu gehörigen Neigungswinkeln laſſen ſich daher ſowohl die horizontalen Grundlinien, als auch die lothrechten Höhen aller ſolcher rechtwinkeligen Dreyecke berechnen.

4) Addiret man endlich alle auf dieſe Art gefundenen lothrechten Höhen der rechtwinkeligen Dreyecke bis zum Scheitel der Bahn in eine Summe; ſo erhält man dadurch die Erhöhung des Scheitels über den Horizont, oder die größte Ordinate der Bahn. Addiret man ferner auch die gefundenen horizontalen Grundlinien der erwähnten rechtwinkeligen Dreyecke von $\varphi = m - e$ bis $\varphi = 0$ in eine Summe zuſammen; ſo erhält man die zur größten Ordinate zugehörige Abſciſſe, oder die Schußweite des aufſteigenden Aſtes.

5) Um nun auch die Schußweite des niederſteigenden Aſtes zu erhalten, welche zur Schußweite des aufſteigenden Aſtes addiret die ganze horizontale Schußweite gibt, muß man in der Formel III. (§. 174.) noch ferner $\varphi = -e$, $\varphi = -2e$, $\varphi = -3e$, $\varphi = -4e$ u. ſ. w. ſetzen, alles hier in N. 2 und 3 angeführte befolgen, und dieſe Arbeit ſolange fortſetzen, bis die Summe der lothrechten Höhen der rechtwinkeligen Dreyecke am niederſteigenden Aſte der ſchon gefundenen größten Ordinate gleich wird. Bis zu dieſem Puncte des niederſteigenden Aſtes, wo die Summe der lothrechten Höhen der rechtwinkeligen Dreyecke ſo groß wird, als die in N. 4 ſchon gefundene größte Ordinate, addire man auch alle horizontale Grundlinien der

recht-

Fig. rechtwinkeligen Dreyecke am niederſteigenden Aſte in eine Summe zuſammen, ſo erhält man dadurch die geſuchte horizontale Schußweite des niederſteigenden Aſtes, welche zu jener des aufſteigenden Aſtes addiret die ganze horizontale Schußweite gibt.

6) Der Winkel $\phi = -ne$, bey welchem die Summe der lothrechten Höhen der rechtwinkeligen Dreyecke am niederſteigenden Aſte der größten Ordinate gleich wird, iſt der Neigungswinkel der Tangente der Bahn an derjenigen Stelle, wo die Kugel wieder den Horizont der Mündung des Geſchützes erreichet, oder wo die Bahn dieſen Horizont das zweytemahl durchſchneidet. Dieſer Winkel iſt jederzeit größer als m. Um ihn hinlänglich genau zu erhalten muß man zuletzt durch Einſchaltung für ϕ einen ſolchen Werth $-ne$ ausfindig zu machen trachten, daß ſodann die Summe der lothrechten Höhen am niederſteigenden Aſte der nach N. 4. gefundenen größten Ordinate zureichend genau gleich werde.

7) Wenn man nähmlich in der Formel III. (§. 174.) alles zwiſchen den Klammern befindliche, bis auf den Factor $\frac{c^2}{4ag}$, in Zahlen berechnet, und dieſe Zahlen nach der Ordnung mit A, B, C, D, E, .. bezeichnet; ſo erhält man für nachſtehende Werthe von φ die dazu gehörigen Bogenlängen z, wie folget:

für $\phi =$	iſt die Bogenlänge $z =$
m	0
$m - e$	$a \,.\, \text{lognat}\left(1 + \frac{c^2}{4ag} . A\right)$
$m - 2e$	$a \,.\, \text{lognat}\left(1 + \frac{c^2}{4ag} . B\right)$
$m - 3e$	$a \,.\, \text{lognat}\left(1 + \frac{c^2}{4ag} . C\right)$
.. ..	.. ..
0	$a \,.\, \text{lognat}\left(1 + \frac{c^2}{4ag} . N\right)$

Daraus folgen die einzelnen Bogenſtücke $\triangle z$, Fig. oder die Hypothenuſen der rechtwinkeligen Dreyecke für die Winkel φ

$\varphi =$	$\triangle z =$
m	o
$m - e$	$a.\text{lognat}\left(1 + \frac{c^2}{4ag}.A\right)$
$m - 2e$	$a.\text{lognat}\left(\frac{1 + \frac{c^2}{4ag}.B}{1 + \frac{c^2}{4ag}.A}\right)$
$m - 3e$	$a.\text{lognat}\left(\frac{1 + \frac{c^2}{4ag}.C}{1 + \frac{c^2}{4ag}.B}\right)$
$m - 4e$	$a.\text{lognat}\left(\frac{1 + \frac{c^2}{4ag}.D}{1 + \frac{c^2}{4ag}.C}\right)$
u. ſ. w.	.. ..

Und

Fig. Und aus dieſen horizontalen Grundlinien $\triangle x$ eben derſelben Dreyecke

$\varphi =$	$\triangle x =$
m	0
$m-e$	$a.\cos(m-e)(\text{lognat}(1+\frac{c^2}{4ag}.A)$
$m-2e$	$a.\cos(m-2e)\,\text{lognat}\left(\frac{1+\frac{c^2}{4ag}B}{1+\frac{c^2}{4ag}.A}\right)$
$m-3e$	$a.\cos(m-3e).\text{lognat}\left(\frac{1+\frac{c^2}{4ag}.C}{1+\frac{c^2}{4ag}.B}\right)$
$m-4e$	$a.\cos(m-4e).\text{lognat}\left(\frac{1+\frac{c^2}{4ag}.D}{1+\frac{c^2}{4ag}.C}\right)$
u. ſ. w.	.. ..

Und

Und die lothrechten Höhen $\triangle y$ eben derſelben Fig. Dreyecke

$\phi =$	$\triangle y =$
m	o
$m - e$	$a \,.\, \sin(m - e) \,.\, \text{lognat}\left(1 + \frac{c^2}{4ag} \,.\, A\right)$
$m - 2e$	$a.\sin(m - 2e) \,.\, \text{lognat}\left(\frac{1 + \frac{c^2}{4ag}.B}{1 + \frac{c^2}{4ag}.A}\right)$
$m - 3e$	$a.\sin(m - 3e)\ \text{lognat}\left(\frac{1 + \frac{c^2}{4ag}.C}{1 + \frac{c^2}{4ag}.B}\right)$
$m - 4e$	$a.\sin(m - 4e) \,.\, \text{lognat}\left(\frac{1 + \frac{c^2}{4ag}.D}{1 + \frac{c^2}{4ag}.C}\right)$
u. ſ. w.	.. ..

Wenn

Fig.

Wenn man z. B. $a = 1$, $\frac{c^2}{4ag} = 5$, und $m = 15^\circ$ ſetzet; ſo findet man für den aufſteigenden Aſt

φ	$\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$	l.t.$(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$	Hieraus	Δy	Δx
14	0,2569609	0,2468145	A = 0,0358913	0,0413261	0,1597960
13	0,2369408	0,2288650	B = 0,0713175	0,0326634	0,1360529
12	0,2173052	0,2109877	C = 0,1063175	0,0262611	0,1184564
11	0,1980184	0,1931766	D = 0,1409304	0,0213436	0,1051488
10	0,1790471	0,1754258	E = 0,1751926	0,0174511	0,0941577
9	0,1603587	0,1577296	F = 0,2091399	0,0142959	0,0854294
8	0,1419220	0,1400822	G = 0,2428068	0,0116883	0,0782032
7	0,1237066	0,1224781	H = 0,2762361	0,0094997	0,0721577
6	0,1056968	0,1049117	I = 0,3094200	0,0076252	0,0669258
5	0,0878228	0,0873774	K = 0,3424562	0,0060224	0,0625453
4	0,0700975	0,0698700	L = 0,3753288	0,0046161	0,0586529
3	0,0524797	0,0523838	M = 0,4080713	0,0033790	0,0552472
2	0,0349420	0,0349137	N = 0,4407441	0,0022829	0,0522882
1	0,0174577	0,0174542	O = 0,4733471	0,0011549	0,0496176
0	0	0	P = 0,5059206	0,0004123	0,0472399
			Summa =	0,2000220	1,2419240

Und

Und für den niederſteigenden Aſt

Fig.

φ	$\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$	l.t.(45° + ½φ)	Hieraus iſt	Δy	Δx
—	—	—			
1	0,0174577	0,0174542	A = 0,5384936	0,0003936	0,0451071
2	0,0349420	0,0349137	B = 0,5710965	0,0011309	0,0431872
3	0,0524797	0,0523838	C = 0,6037593	0,0018096	0,0414469
4	0,0700975	0,0698700	D = 0,6365117	0,0024383	0,0398659
5	0,0878228	0,0873774	E = 0,6693843	0,0030241	0,0384244
6	0,1056968	0,1049117	F = 0,7024206	0,0035746	0,0371239
7	0,1237066	0,1224781	G = 0,7356137	0,0040891	0,0358898
8	0,1419220	0,1400822	H = 0,7690340	0,0045811	0,0347966
9	0,1603587	0,1577296	I = 0,8027007	0,0050481	0,0337775
10	0,1790471	0,1754258	K = 0,8366480	0,0054954	0,0328389
11	0,1980184	0,1931766	L = 0,8709102	0,0059256	0,0319719
12	0,2173052	0,2109877	M = 0,9055232	0,0063418	0,0311709
13	0,2369408	0,2288650	N = 0,9405662	0,0067592	0,0304890
14	0,2569609	0,2468145	O = 0,9759610	0,0071343	0,0297166
15	0,2774014	0,2648423	P = 1,0118410	0,0075251	0,0290976
16	0,2983010	0,2829544	Q = 1,0482440	0,0079095	0,0285208
17	0,3197001	0,3011577	R = 1,0851884	0,0082971	0,0280105
18	0,3416408	0,3194583	S = 1,1227227	0,0086565	0,0274548
19	0,3641680	0,3378629	T = 1,1609240	0,0090342	0,0270063
20	0,3873291	0,3563785	U = 1,1998088	0,0094039	0,0265558
21	0,4111741	0,3750121	W = 1,2394420	0,0097778	0,0261519
22	0,4357563	0,3937709	X = 1,2798800	0,0101540	0,0257776
23	0,4611325	0,4126626	Y = 1,3211820	0,0105340	0,0254314
24	0,4873633	0,4316947	Z = 1,3634226	0,0109216	0,0251180
25	0,5145135	0,4508754	a = 1,4066402	0,0113077	0,0248125
26	0,5426522	0,4702127	b = 1,4509360	0,0117728	0,0246822
27	0,5718538	0,4897154	c = 1,4963780	0,0121146	0,0242999
28	0,6021983	0,5093923	d = 1,5430450	0,0125340	0,0240777
28¼	0,6099730	0,5143398	c = 1,5519278	0,0023456	0,0044004
			Summa =	0,2000234	0,8771980

Die Summe in der Spalte Δy des niederſteigenden Aſtes iſt für $\varphi = -28°$ noch um etwas weniges kleiner als die größte Ordinate, oder die Summe aller Δy bey dem aufſteigenden Aſte; für $\varphi = 29°$ aber wird die Summe aller Δy des niederſteigenden Aſtes ſchon zu groß: und man findet durch eine leichte Beurtheilung, daß man bey $\varphi = -28\frac{1}{4}$ die Rechnung enden könne. Dadurch erhält man

die

Fig. die Schußweite des aufſteigenden Aſtes 1,24192
und des niederſteigenden 0,87720

folglich die ganze Schußweite 2,11912
und die Erhöhung des Scheitels 0,20002

Wenn man es recht genau nehmen will, ſo kann man bey der Berechnung der horizontalen Grundlinien $\triangle x$, und der lothrechten Höhen $\triangle y$ der rechtwinkeligen Dreyecke für $\phi = m - e$, $m - 2e$, $m - 3e$, u. ſ. w. die dazugehörigen mittleren Neigungswinkel der Hypothenuſen in obigen für $\triangle x$ und $\triangle y$ angegebenen Formeln ſetzen $m - \frac{1}{2}e$, $m - \frac{3}{2}e$, $m - \frac{5}{2}e$, u. ſ. w. anſtatt $m - e$, $m - 2e$, $m - 3e$, u. ſ. w. weil am erſten Dreyecke zwiſchen m und $m - e$ die mittlere Neigung $= m - \frac{1}{2}e$ iſt; und ſo auch $m - \frac{3}{2}e$ die mittlere Neigung zwiſchen $m - e$ und und $m - 2e$; u ſ. w.

Die mühevolle, und langweilige Berechnung der Schußweite für gegebene a, c, und m mittelſt der Formel III. (§. 174.) auf die angeführte Weiſe kann in ſolchen Fällen vorgenommen werden, wenn man unterſuchen will, in wie weit andere durch verſchiedene Annäherungen beſtimmten Formeln für die Schußweite und Erhöhung des Scheitels zutreffen.

§. 176.

Auch für die Geſchwindigkeit nach der Richtung der Tangente läßt ſich eine Gleichung angeben.

Denn es iſt $dt^2 = -\frac{dp\,dx}{2g}$ (§. 170. V.)

und $dz^2 = dx^2(1+p^2)$

folglich auch $\frac{dz^2}{dt^2} = -\frac{2g\,dx(1+p^2)}{dp}$

und wegen $\frac{dz}{dt} = v$,

iſt ferner auch $v^2 = -\frac{2g\,dx(1+p^2)}{dp}$

Nun

Nun ſetze man hier ſtatt dx den Werth aus (§. 174.) Fig.

$$dx = \frac{adp}{C + \frac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}L[p+(1+p^2)^{\frac{1}{2}}]}$$

ſo erhält man

$$v^2 = - \frac{2ag(1+p^2)}{C + \frac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}L[p+(1+p^2)^{\frac{1}{2}}]}$$

Setzet man endlich in dieſer Gleichung den im §. 174. II. für C beſtimmten Werth, und tangφ anſtatt p; ſo erhält man nach vorgenommener Reduction

$$\text{I. } v^2 = \frac{4agc^2\cos^2 m}{\cos^2\varphi} : \Big\{ 4ag + c^2\cos^2 m \,.\, [\frac{\sin m}{\cos^2 m} + \text{L. T.} (45° + \tfrac{1}{2}m) - \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \text{L. T.} (45° + \tfrac{1}{2}\varphi)] \Big\}$$

die geſuchte Formel für die Tangentialgeſchwindigkeit in jedem beliebigen Puncte der Bahn.

Hieraus folget für $\varphi = 0$ die Formel zur Berechnung der Geſchwindigkeit am Scheitel der Bahn nach horizontaler Richtung

$$\text{II. } v^2 = \frac{4agc^2\cos^2 m}{4ag + c^2\cos^2 m [\frac{\sin m}{\cos^2 m} + \text{L.T.}(45° + \tfrac{1}{2}m)]}.$$

Anmerk. Man kann für die Tangentialgeſchwindigkeit vermöge der (im §. 170.) gebrauchten Annäherung einen einfacheren Ausdruck finden, wenn man in der Gleichung $v^2 = - \frac{2g\,dx(1+p^2)}{dp}$ für dx den Werth

$$dx = \frac{-adp}{\tan m + \frac{2ag}{c^2\cos^2 m} - p} \quad \text{(aus §. 170. N. 12.)}$$

ſubſtituiret.

Fig.

§. 177.

Um endlich auch die Zeit t zu finden, welche zur Beſchreibung eines beliebigen Bogens z der Bahn verwendet wird, iſt

$$dt = \sqrt{\left(-\frac{dp\,dx}{2g}\right)} \text{ aus §. 170. V.}$$

Setzet man nun ſtatt dx den Werth (aus §. 174.)

$$dx = \frac{a\,dp}{C + \frac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}L[p + (1+p^2)^{\frac{1}{2}}]}$$

ſo erhält man folgende Differenzialgleichung

$$dt = \frac{dp\sqrt{a}}{\sqrt{2g[-C - \frac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}L[p + (1+p^2)^{\frac{1}{2}}]]}}$$

die ſich aber nicht integriren läßt.

Um nun durch Annäherung eine Differenzialgleichung für dt zu erhalten, die ſich integriren läßt, ſetze man in der Gleichung (aus §. 170. VIII).

$$dt = \frac{dx}{(2ag)^{\frac{1}{2}}}\left(\text{tang}\,m + \frac{2ag}{c^2\cos^2 m} - p\right)^{\frac{1}{2}}$$

den Werth für p (aus §. 170. IX.)

$$p = \text{tang}\,m + \frac{2ag}{c^2\cos^2 m} - \frac{2agh^{\frac{x}{a}}}{c^2\cos^2 m}$$

dadurch erhält man

$$dt = \frac{dx\,h^{\frac{x}{2a}}}{c\cos m}.$$

Und hieraus folget die geſuchte Annäherungs-Formel zur Berechnung der Zeit, weil für $x = 0$ auch $t = 0$ ſeyn muß,

$$t = \frac{2a}{c\cos m}\cdot\left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right).$$

Nach der zweyten Annäherung (§. 173.) iſt alſo

$t =$

$$t = \frac{2a\cos\frac{1}{2}m}{c\cos m} \,.\, \left(h^{\frac{x}{2a\cos\frac{1}{2}m}} - 1\right).$$

§. 178.

Hiermit iſt nun das Weſentliche angezeiget, worauf man bey dieſem baliſtiſchen Probleme zu ſehen habe. Bey der ausübenden Artillerie iſt davon kein beſonderer Gebrauch zu machen. Nur die Formeln II. und III. des § 172 oder auch II. und III. des §. 173 können in dem Falle mit Nutzen gebrauchet werden, wenn zu einer neuen Geſchützgattung eine Tabelle der Tragweiten für verſchiedene Elevationswinkel zu entwerfen iſt. Wenn z. B. zu einer 8pfündigen Kanone bey einer beſtimmten Ladung die Tragweiten für alle einzelne Elevationswinkel von 1 bis 15 Grad anzugeben wären; ſo müßte man die zu zwey oder drey verſchiedenen Elevationen, etwan zu 1°, 8° 15°, zugehörigen Schußweiten durch einige genau ausgeführte Probeſchüſſe beſtimmen. Sodann könnte man mitlelſt der Formel III. §. 173. aus der mittleren Schußweite bey jeder der drey gebrauchten Elevationen die anfängliche Geſchwindigkeit berechnen. Aus den ſo berechneten anfänglichen Geſchwindigkeiten laſſen ſich ſodann die Schußweiten für die übrigen zwiſchenliegenden Elevationen mit zureichender Genauigkeit mittelſt der Formel II. §. 173. einſchalten.

§. 179.

Wenn man hier die Formel der geradlinigen Bewegung in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel bey Vernachläſſigung der Schwerkraft (aus §. 158.) mit den Formeln des lothrechten Steigens (aus §. 166.) gehörig verbindet; ſo erhält man auch eine Gleichung für die Bahn einer geſchoſſenen Kugel in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel. Allein eine ſolche Gleichung iſt nicht ganz richtig, weil ſie ſich nicht zugleich aus den Differenzial-Gleichungen (§. 170.) ableiten läßt. Man kann ſie nur als eine Annäherung zur geſuchten wahren Gleichung anſehen. Sie wird auf folgende Art gefunden.

Fig. 54 Es ſey AMCB Fig. 54. die Bahn einer unter dem Elevationswinkel BAT $= m$ geſchoſſenen oder geworfenen Kugel; AP $=$ NM $= x$; PM $=$ AN $= y$; die anfängliche Geſchwindigkeit $= c$ nach der Richtung AT; und von A bis M die Dauerzeit der Bewegung $= t$.

Die Geſchwindigkeit c kann man nach den Richtungen AN und AP in die zwey Geſchwindigkeiten $c.\sin m$, und $c.\cos m$ zerlegen.

Daraus erhält man (vermöge §. 158. VII. und VIII.

$$AP = x = 2a \,.\, \text{lognat}\,\left(1 + \frac{tc\cos m}{2a}\right);$$ und hieraus

$$t = \frac{2a}{c\cos m}\left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right).$$

Ferner iſt (vermöge §. 166 VI. AN oder

$$y = a \,.\, L\left[\left(1 + \frac{c^2 \sin^2 m}{b^2}\right).\text{Cos}^2\,\text{arc}\left(\text{Arctang}\frac{c\sin m}{b} - \frac{bt}{2a}\right)\right]$$

Subſtituiret man nun in dieſer letzten Gleichung ſtatt t den eben angeführten Werth $\frac{2a}{c\cos m}\left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right)$; ſo erhält man dadurch eine Gleichung für y, welche bloß durch x, und durch andere gegebene Größen ausgedrucket iſt; nähmlich

$$y = a \,.\, L\left[\left(1 + \frac{c^2 \sin^2 m}{b^2}\right)\text{Cos}^2\,\text{arc}\left(\text{Arc tang}\frac{c\sin m}{b} - \frac{b}{c\cos m}\left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right)\right)\right].$$

Aus dieſer letzten Gleichung kann man ſodann die größte Ordinate DC, und die dazu gehörige Abſciſſe AD, oder die Schußweite des aufſteigenden Aſtes nach der Lehre vom Größten und Kleinſten beſtimmen.

Dar-

Darauf ſuchet man die Geſchwindigkeit $= V$ für den Scheitel der Bahn nach der horizontalen Richtung CQ mittelſt der Formel $v = ch^{\frac{-x}{2a}}$ im §. 158. V. da man in dieſer Formel $c \cos m$ ſtatt c, und den Werth AD ſtatt x ſetzet. Fig. 54

Aus der nun bekannt gewordenen Geſchwindigkeit $= V$ im Scheitel der Bahn läßt ſich ferner auch eine Gleichung für den niederſteigenden Aſt angeben. Wenn man nähmlich CQ $= x$, QR $= y$ ſetzet, und die Zeit der Bewegung von C bis R mit t bezeichnet; ſo iſt (vermöge §. 158 VII. und VIII.)

$$CQ = x = 2a \,.\, \text{lognat}\left(1 + \frac{Vt}{2a}\right);\ \text{hieraus}$$

$$t = \frac{2a}{V}\left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right);$$

und (vermöge §. 163. VI.) iſt QR, oder

$$y = bt + 2a . \text{lognat} \tfrac{1}{2}\left(1 + h^{\frac{-bt}{a}}\right).$$

Subſtituiret man nun in dieſer Gleichung ſtatt t den angeführten Werth $\frac{2a}{V}\left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right)$, ſo erhält man die geſuchte Gleichung für den niederſteigenden Aſt. Daraus kann man nun aus dem ſchon bekannten Werthe von FB $=$ CD die dazugehörige Abſciſſe CF $=$ DB berechnen. Dadurch erhält man die Schußweite des niederſteigenden Aſtes. Adiret man endlich dieſe Schußweite des niederſteigenden Aſtes zu jener des aufſteigenden; ſo erhält man die ganze horizontale Schußweite AB.

Durch folgende Erwägung kann man auch eine Gleichung für die Bahn der geſchoſſenen Kugeln in der widerſtehenden Luft erhalten; eben ſo wie im 3ten Th. §. 76. die Gleichung für die Parabel bey der freyen Bewegung geworfener Körper gefunden worden iſt.

Die

Fig. 55 Die Kugel werde nach der Richtung AT Fig. 55. unter dem Elevations-Winkel BAT $= m$ mit der anfänglichen Geſchwindigkeit $= c$ geſchoſſen. Nach Verlauf der Zeit $= t$ gelange ſie nach M. Es ſey AP $= x$,

PM $= y$; ſo iſt AN $= \frac{x}{\cos m}$, PN $= x \,.\, \operatorname{tang} m$, und

$$y = x \,.\, \operatorname{tang} m - NM.$$

Ohne Schwere würde die Kugel in der Zeit t in der widerſtehenden Luft (vermöge §. 158. VII.) den Weg

$$AN = \frac{x}{\cos m} = 2a . \operatorname{lognat}\left(1 + \frac{ct}{2a}\right)$$

zurücklegen; und es wäre

$$t = \frac{2a}{c}\left(h^{\frac{x}{2a\cos m}} - 1\right).$$

Weil aber die Schwerkraft auf die Kugel wirket; ſo wird dieſe dadurch in derſelben Zeit t nach lothrechter Richtung um NM gegen den Horizont herabgetrieben; und es iſt (wegen §. 163. VI.)

$$MN = bt + 2a . \operatorname{lognat} \tfrac{1}{2}\left(1 + h^{-\frac{bt}{a}}\right)$$

oder wenn man ſtatt t den angeführten Werth ſetzet,

$$MN = \frac{2ab}{c}\left(h^{\frac{x}{2a\cos m}} - 1\right) + 2a . L \tfrac{1}{2}\left[1 + h^{-\frac{2b}{c}\left(h^{\frac{x}{2a\cos m}} - 1\right)}\right]$$

und endlich iſt, wenn man dieſen Werth anſtatt NM in obiger Gleichung ſubſtituiret,

$$y = x \,.\, \operatorname{tang} m - \frac{2ab}{c}\left(h^{\frac{x}{2a\cos m}} - 1\right)$$

$$- 2a . L \tfrac{1}{2}\left[1 + h^{-\frac{2b}{c}\left(h^{\frac{x}{2a\cos m}} - 1\right)}\right]$$

die geſuchte Gleichung für die Bahn.

Da

Da man aber von dieſer Gleichung bey der Ausübung Fig.
keinen Gebrauch machen kann; und auch von ihrer Richtigkeit keine Ueberzeugung hat; ſo iſt es nicht nöthig ſich länger dabey aufzuhalten.

§. 180.

Zum Beſchluße dieſes Werkes will ich nur noch eine kurze Erwähnung machen, wie man die anfängliche Geſchwindigkeit der Kanonenkugeln aus der Pulverladung und aus der Länge des Geſchützrohres beſtimmen könne. Man kann zwar bey einer ſolchen Unterſuchung den vorgeſetzten Zweck niemahls mit befriedigender Genauigkeit erreichen, weil bey der Hervorbringung der Geſchwindigkeit durch die Entzündung des Schießpulvers in einem Geſchütze ſo vielerley verſchiedene, nicht hinlänglich bekannte, Umſtände zuſammentreffen, daß man ſie nicht alle in Rechnung bringen kann. Indeſſen wird es doch nicht überflüſſig ſeyn, allhier den Weg zu zeigen, wie man vorzugehen habe, um ſich dem ausgeſteckten Ziele zu nähern; und zwar durch folgende

Aufgabe.

Aus der gegebenen Länge des Geſchützrohres, aus der Länge der Pulverladung, und aus dem Durchmeſſer der Kugel die anfängliche Geſchwindigkeit der geſchoſſenen Kugel zu finden, mit welcher ſie aus der Mündung des Geſchützes hinausfährt.

Auflöſung.

1) Es ſey

$a = AD$ Fig. 56. die Länge der cylindriſchen Aushöhlung des Geſchützes, der Seele Kanone, 56

$b = AB$ die Länge des mit Schießpulver angefüllten cylindriſchen Raumes. Hätte dieſer Raum eine andere Geſtalt, ſo müßte er in einen Cylinder von der Weite der Kugel verwandelt werden um die Länge $= b$ zu erhalten.

c

Fig. 56 c der Durchmeſſer der Kugel, welcher hier dem Durchmeſſer der Bohrung, oder der Seele gleich geſetzet wird.

n die Zahl, welche anzeiget, wie vielmahl die ſpeciſiſche Schwere der Kugel größer iſt, als die ſpeciſiſche Schwere des Waſſers. Bey den vollen eiſernen Kugeln iſt ſehr nahe $n = 7,1$. Bey den hohlen Kugeln (Bomben und Grenaden) müßte man das Gewicht einer ſolchen hohlen Kugel durch das Gewicht einer eben ſo großen vollen Waſſerkugel dividiren, um n zu erhalten.

f ſey die Höhe der Waſſerſäule deren Gewicht den Elaſticitätsdruck der atmoſphäriſchen Luft in ihrem mittleren Zuſtande an der Erdfläche vorſtellet. Es iſt beynahe $f = 32$ Fuß.

m ſey die Zahl, welche anzeiget, wie vielmahl die aus der Verbrennung des Schießpulvers erzeugte, und durch die Hitze vermehrte Elaſticität der in dem Raume der Pulverladung noch eingeſchloſſenen Luft größer iſt, als die Elaſticität der gewöhnlichen atmoſphäriſchen Luft. Aus mehreren Verſuchen hat man gefunden, daß man beyläufig $m = 1000$ ſetzen könne,

q ſey das eigenthümliche Gewicht des Waſſers. Im Wiener-Maße und Gewichte iſt $q = 56\frac{3}{8}$ Pfund.

2) Nach dieſen Benennungen iſt nun die Preſſung gegen die Kugel bey B (wenn die Pulverladung durch die Verbrennung in elaſtiſchen Dampf ſich aufgelöſet hat, ehe die Kugel von ihrer Stelle merklich gewichen iſt) im Anfange der Bewegung $= \frac{1}{4}c^2\pi \,.\, mfq =$ dem Gewichte einer Waſſerſäule, welche den Durchſchnitt der Kugel zur Grundfläche, und die $m$fache Elaſticitäts-Höhe der gewöhnlichen atmoſphäriſchen Luft zu ihrer Höhe hat.

3) In einer gewiſſen Zeit $= t$ wird durch dieſe anfängliche Preſſung die Kugel bis P fortgetrieben; und ſie erlanget dadurch in P eine gewiſſe Geſchwindigkeit $= v$ nach zurückgelegtem Wege BP $= x$.

4)

4) Die Preſſung des elaſtiſchen Pulverdampfes gegen die Kugel in P iſt nun hier im Verhältniße des Raumes AP zu AB vermindert; weil die Elaſticitäten einer und derſelben Luftmaſſe in verſchiedenen Raumsinhalten AB und AP ſich verhalten umgekehrt wie dieſe Raumsinhalte (§. 67.), oder hier umgekehrt wie die Längen AP ($b+x$ zu AB(b. Nähmlich aus der Preſſung in B, $=\frac{1}{4}c^2\pi mfq$ folget die Preſſung in P gegen die Kugel nach dem bekannten Mariottiſchen Geſetze $=\frac{1}{4}c^2\pi mfq \times \frac{b}{b+x}$. Dieſer Ausdruck ſtellet uns die bewegende Kraft in dem Puncte P vor. Die bewegte Maſſe aber iſt das Gewicht der Kugel $=\frac{1}{6}c^3\pi nq$. Fig. 56

5) Subſtituiret man nun in der allgemeinen Formel der Bewegung $v\mathrm{d}v=\frac{2gP\mathrm{d}x}{M}$ (3. Th. §. 56. III.) anſtatt P und M die Werthe $P=\frac{1}{4}c^2\pi mfq\frac{b}{b+x}$, und $M=\frac{1}{6}c^3\pi nq$; ſo iſt

$$v\mathrm{d}v=\frac{3mbfg}{cn}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{b+x}.$$

Daraus folget durch die Integration

$$v^2=\text{Const.}+\frac{6mbfg}{cn}.\text{lognat}(b+x)$$

es iſt aber $v^2=0$ für $x=0$;

folglich $\text{Const.}=-\frac{6mbfg}{cn}\text{lognat}\ b$; und

$$v^2=\frac{6mbfg}{cn}.\text{lognat}\left(1+\frac{x}{b}\right).$$

6) Für $x=\text{BD}=a-b$ erhält man aus der letzten Formel die Geſchwindigkeit der Kugel an der Mündung des Geſchützes, welche man die anfängliche Geſchwindigkeit zu nennen pflegt. Wird nun dieſe geſuchte anfängliche Geſchwindigkeit mit V bezeichnet; ſo iſt, wenn man in der angeführten Formel $a-b$ ſtatt x und V ſtatt v ſchreibt,

$V=$

Fig. 56

$$V = \sqrt{\left(\frac{6mbfg}{cn} \cdot \text{lognat} \frac{a}{b}\right)}$$

oder wenn man für m, f, g, ihre Werthe $m = 1000$, $f = 32$, $g = 15\frac{1}{2}$ ſetzet, und a, b, c im Wien. Fußmaße ausdrucket,

$$V = \sqrt{\left(\frac{2976000b}{nc} \cdot \text{lognat} \frac{a}{b}\right)} \text{ Wien. Fuß.}$$

Nach dieſer Formel wird ſowohl für $b = 0$, als auch für $b = a$ die Geſchwindigkeit $V = 0$. Deßwegen gibt es einen Werth für b, bey welchem V ein Größtes wird; und es iſt leicht dieſen Werth zu beſtimmen.

7) Wenn der Raum hinter der Kugel AB $= b$ nicht ganz, ſondern nur ein Theil desſelben, deſſen Länge $= e$ ſey, mit Pulver angefüllet wäre; ſo müßte in der vorigen Formel $V = \sqrt{\left(\frac{6mbfg}{nc} \cdot \text{lognat} \frac{a}{b}\right)}$ anſtatt $m = 1000$ nun geſetzet werden $m = \frac{1000e}{b}$; und die anfängliche Geſchwindigkeit, im Wien. Fußmaße ausgedrucket, wäre ſodann

$$V = \sqrt{\left(\frac{2976000e}{nc} \cdot \text{lognat} \frac{a}{b}\right)}.$$

§. 181.

Nach der zuletzt angeführten Formel kann man nun zu den gebräuchlichen Feld- und Belagerungs-Kanonen, wie auch zu den Mörſern und Haubitzen aus den bekannten Abmeſſungen derſelben, und aus den dazugehörigen Pulverladungen die anfängliche Geſchwindigkeit für jedes Geſchütz berechnen. Wenn man dieſe ſo berechnete anfängliche Geſchwindigkeit mit jener vergleichet, die man durch die oben (§. 173. III.) angegebene Formel aus der bekannten Schußweite und aus dem Elevationswinkel in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel erhält; ſo wird man daraus erſehen, wie groß man nach Verſchiedenheit des Schießpulvers den

Werth

Werth von m in der letzten Formel allhier annehmen kön- Fig.
ne, daß die zwey aus verſchiedenen Gründen abgeleiteten anfänglichen Geſchwindigkeiten mit einander übereinſtimmen.

§. 182.

Die nach der gegebenen Formel (§. 180.) berechnete anfängliche Geſchwindigkeit kann übrigens nur beynahe richtig ſeyn, weil verſchiedene Hinderniſſe der Bewegung hier vernachläſſiget ſind, welche alle insgeſammt die geſuchte anfängliche Geſchwindigkeit vermindern.

Dieſe Hinderniſſe ſind. 1) Der Druck der Atmoſphäre gegen die Kugel $= \frac{1}{4}c^2\pi fq$ von der Seite der Mündung. Wenn man nun dieſen auch in Erwägung ziehen will, ſo muß man bey der Auflöſung der angeführten Aufgabe in N. 5. für P den Werth $\frac{1}{4}c^2\pi mfq \cdot \frac{b}{b+x} - \frac{1}{4}c^2\pi fq$ ſetzen; dadurch erhält man die geſuchte anfängliche Geſchwindigkeit in N. 6.

$$V = \sqrt{\left(\frac{6fg}{nc}\left[mb \cdot L\frac{a}{b} - (a-b)\right]\right)}.$$

2). Der Luftwiderſtand. 3) Der Verluſt des elaſtiſchen Pulverdampfes durch das Zündloch und durch den Spielraum. 4) Die Reibung, welche die Kugel bey ihrer Bewegung im Rohre zu überwinden hat. 5) Die allmählige Entzündung des Pulvers. Es iſt nähmlich bey der Auflöſung dieſer Aufgabe vorausgeſetzet worden, daß die ganze Pulverladung durch eine gleichſam plötzliche Verbrennung in elaſtiſchen Dampf aufgelöſet ſey, ehe die Kugel von ihrer anfänglichen Stelle merklich wegrücket. Dieſes iſt nun nicht ſo beſchaffen. Das Pulver brauchet immer eine gewiſſe, obſchon ſehr kleine Zeit zu ſeiner gänzlichen Verbrennung. Sobald ein Theil der Pulverladung entzunden iſt, wird durch dieſen elaſtiſchen Dampf die Kugel, und mit ihr das noch nicht enzündete Pulver in Bewegung geſetzet, ſo daß man in obiger Formel bey der Beſtimmung der bewegten Maſſe M zu der Maſſe der Kugel auch noch einen gewiſſen Theil der Pulverladung hinzuſetzen ſollte. Wie nun dieſe und noch einige andere Hin-

Fig. 56 Hinderniſſe im gegenwärtigen Falle in Erwägung zu ziehen, und in Rechnung zu bringen ſind, lehret umſtändlich L. Euler in den Anmerkungen zu Robins neuen Grundſätzen der Artillerie Berlin 1745. Wer ſich die bisher vorgetragenen Gründe der höhern Analyſis, Dynamik- und Hydrodynamik eigen gemacht hat, wird das genannte Werk des L. Euler, wie auch andere ähnliche Schriften über theoretiſche Gegenſtände der Artillerie leſen, und gründlich beurtheilen können, was für ein Nutzen für die practiſche Artillerie daraus zu ſchöpfen ſey.

§. 183.

Die im §. 182. angegebene Formel

$$V = \sqrt{\left(\frac{6fg}{nc}\left[mb.\,\text{lognat}\,\frac{a}{b} - (a-b)\right]\right)}$$

zur Berechnung der anfänglichen Geſchwindigkeit V aus der gegebenen Länge des Geſchützrohres, aus der Pulverladung, und aus dem Durchmeſſer der Kugel, dienet auch zur Berechnung der anfänglichen Geſchwindigkeit einer mittelſt der Windbüchſe abgeſchoſſenen Kugel wenn m die Zahl bedeutet, wie vielmahl die im Raume AB zuſammengepreßte Luft dichter iſt, als die gewöhnliche atmoſphäriſche. Dieſe Formel gibt zu erkennen, daß V immer größer werden kann, je größer m wird. Und ſo zeiget auch die Formel im §. 180. N. 6. an daß bey einer beſtimmten Pulverladung V mit a ohne Ende wachſen müßte. Das letzte kann zwar nur in ſolange geſchehen, bis die Elaſticität des anfangs in AB zuſammengepreßten, und nun durch AD verbreiteten Pulverdampfes nur noch ſo groß iſt, als die Elaſticität und der Widerſtand der atmoſphäriſchen Luft; worauf ſodann die fernere Vermehrung der Geſchwindigkeit der Kugel aufhöret.

Wenn man übrigens den Werth des Buchſtaben m in den angegebenen Formeln vermehren, das iſt durch irgend ein Hülfsmittel die Kraft des Pulvers vergrößern könnte, deſſen Möglichkeit man doch nicht läugnen kann; ſo müßte die anfängliche Geſchwindigkeit dadurch auch vergrößert wer-

den

den; nähmlich je größer m würde, deſto größer müßte in einem gewiſſen Verhältniſſe auch V werden. Die Geſchwindigkeit alſo, die man den Kugeln, Grenaden, und Bomben durch die elaſtiſche Kraft des Pulverdampfes beybringen kann, hat kei. Grenze, die ſie nicht erreichen, nicht überſteigen könnte. Fig.

§. 184.

Und doch behauptet Herr John Muller in ſeinem Werke Treatiſe of Artillery, the third Edition, London 1780, daß man einer einer abgeſchoſſenen Kugel nur einen gewiſſen Grad von Geſchwindigkeit in der widerſtehenden Luft beybringen kann, die bewegende Kraft möge wie immer vermehret werden: ſo wie es bey dem lothrechten Sinken eines feſten Körpers in der widerſtehenden Luft eine Grenze gibt, welche die wachſende Geſchwindigkeit nicht überſteigen kann. Ueber dieſen neu aufgeſtellten Satz des H. Muller von der Beſtimmung der möglich größten Geſchwindigkeit der Kanonenkugeln iſt eine aus dem engliſchen überſetzte Abhandlung in Böhms Magazine für Ingenieurs und Artilleriſten V. Bd. Gieſſen 1779 Seite 259 befindlich.

Dieſe möglich größte Geſchwindigkeit $= c$ hängt nach der Meinung des H. Muller bloß allein vom Durchmeſſer der Kugel $= D$, und von der Verhältnißzahl $= N$ der ſpecifiſchen Schwere der Kugel zur ſpecifiſchen Schwere der Luft ab; er ſetzet $c = \sqrt{24gDN}$ bey der Beſchleunigung der Schwere $= g$. Nach ſeiner Berechnung iſt die möglich größte Geſchwindigkeit einer 3 ℔gen engliſchen eiſernen Kugel nicht größer als 615,7 Londner Fuß, und bey der 6 ℔gen Kanone nicht größer als 619,3 Fuß. Wenn ein Geſchütz, z. B. eine 6 ℔ge Kanone, und eine dazugehörige Pulverladung dergeſtalt eingerichtet ſind, daß die 6 ℔ge Kugel gerade die angegebene Geſchwindigkeit von 619,3 Fuß erhält; ſo iſt nach der Meinung des H. Muller jede fernere Bemühung, etwan durch Verlängerung des Rohres, Verminderung des Spielraums, Verſtärkung der Ladung, Verbeſſerung des Pulvers, u. ſ. w. die anfängliche Geſchwindigkeit der abzuſchieſſenden Kugel zu vergrößern, gänzlich fruchtlos. Die Erfahrung ſtimmet mit dieſer Behauptung

nicht

Fig. nicht überein; ſie iſt auch ſonſt den Gründen der Mechanik nicht gemäß. Im erwähnten Magazine für Ing. und Artill. wird zwar die Richtigkeit dieſer neuen Lehre des H. Muller bezweifelt. Allein der eigentliche Irrthum iſt nicht aufgedecket. Ich war daher bemühet dieſen Irrthum, der in mehreren Auflagen des genannten Werkes vom H. Muller aufrecht erhalten wird, bis zu ſeinem Urſprunge zu verfolgen; und entdeckte denſelben im Folgenden.

H. John Muller hat in ſeinem Werke, Appendix or Supplement to the Treatise of Artillery, London 1768, Seite 117 im Abſatze 168, durch unrichtige Schlüſſe nachſtehende Gleichungen

$$\text{I. } y = \tfrac{1}{2} r \,.\, \text{lognat} \frac{r - c^2}{r - v^2}$$

$$\text{II. } t = \tfrac{1}{2} a \,.\, \text{lognat} \frac{(a-c)(a+v)}{(a+c)(a-v)}$$

herausgebracht, welche bey einer geradlinigen Bewegung im widerſtehenden flüſſigen Mittel auf einer horizontalen Ebene mit Beſeitigung der Reibung und aller ſonſtiger Hinderniſſe außer dem Widerſtande des Flüſſigen, den Zuſammenhang zwiſchen dem zurückgelegten Wege y, zwiſchen der Dauerzeit t, zwiſchen der anfänglichen Geſchwindigkeit c, zwiſchen der noch vorhandenen Geſchwindigkeit v nach der Zeit t, und zwiſchen dem unveränderlichen Werthe $r = a^2$ vorſtellen ſollen. Und es bedeutet bey ihm $r = 6DN$ diejenige Höhe, von welcher eine Kugel des Durchmeſſers D im luftleeren Raume frey herabfallen müßte, um eine Geſchwindigkeit $= \sqrt{4gr}$ zu erhalten, daß ſodann bey dieſer Geſchwindigkeit der Widerſtand einer flüſſigen Maſſe gegen die Kugel eben ſo groß wäre, als das Gewicht der Kugel; N zeiget übrigens an, wie vielmahl die ſpecifiſche Schwere der Kugel größer iſt, als die ſpecifiſche Schwere der flüſſigen Maſſe. Der Widerſtand der flüſſigen Maſſe gegen eine darin bewegte Kugel iſt nach der Meinung des H. Muller dem Gewichte einer Säule dieſer Flüſſigkeit gleich, welche die größte Kreisfläche der Kugel zur Grundfläche, und $\frac{1}{9}$ der Ge-

Geſchwindigkeitshöhe zu ihrer Länge hat. Bey allen bisher angeſtellten Verſuchen hat man den Widerſtand weit größer gefunden. Herr Muller mußte ihn ſo klein annehmen, damit er die aus ebenfalls viel zu klein angenommenen anfänglichen Geſchwindigkeiten berechneten Schußweiten der Kanonkugeln mit der Erfahrung übereinſtimmend machte. Es hat auf dieſe Art der zweyte Fehler den erſten beynahe getilget. Fig.

Nachdem H. Muller die angeführten unrichtigen Gleichungen I. und II. aufgeſtellet hatte, ſagte er nun weiters im 169ten Abſatze Seite 119. *)

„ Hieraus (aus den angeführten Formeln I. und „ II.) erhellet ganz deutlich, daß die gegebene Geſchwin„ digkeit, mit der ein Körper ſich zu bewegen anfängt, je„ derzeit kleiner ſeyn müſſe, als die möglich größte, die „ dieſer Körper in demſelben widerſtehenden flüſſigen Mit„ tel (durch den Fall) erlangen kann. Denn wenn $r = c^2$, „ oder $a = c$ geſetzet wird; ſo verſchwindet ſowohl der zu„ rückgelegte Weg, als auch die verfloſſene Zeit (eigentlich „ wir y und t unmöglich). Obwohl dieſes eine ſehr merk„ würdige Wahrheit iſt; ſo hat doch bisher kein Schrift„ ſteller hierauf Bedacht genommen; im Gegentheile nehmen „ einige die Geſchwindigkeit viel größer an. — Man muß „ hierbey ferner bemerken, daß dieſer Satz immer wahr „ bleibe; es möge ſich der Körper entweder wagrecht, oder „ aber längſt einer ſchiefen Ebene bewegen, weil dadurch an

---

*) Hence it is manifeſt, that the given velocity, with which the body begins to move, muſt always be leſs than the greateſt velocity that the body can acquire in the medium. For when $r = cc$, or $a = c$ then both the ſpace moved over and the time elapſed vaniſh. Although this is very remarkable, yet no author has taken notice of it; on the contrary, they often ſuppoſe this velocity much greater. — It muſt be obſerved that the ſame thing is true, whether the body moves in an horizontal line or in one that makes a given angle with it, ſince every thing will be the ſame as above. This we thought neceſſary to take notice of, to prevent an uncautious reader from taking what has been here ſaid as only applicable to horizontal ranges.

den

Fig. „ den obigen Ausdrücken nichts geändert wird. Wir hal„ten für nöthig dieſen Umſtand hier beyzuſetzen, damit nicht „ vielleicht ein etwas unachtſamer Leſer das bisher geſagte „ nur allein auf horizontale Bewegungen anwendbar glaube.

Daß die zwey angeführten Gleichungen I. und II. auch bey dem vom H. Muller angenommenen Widerſtande unrichtig ſind, erhellet ſogleich, wenn man dieſelben mit den oben im §. 158 für eben dieſen Fall aus richtigen Gründen abgeleiteten Formeln vergleichet.

Wenn man nähmlich bey der Aufgabe im §. 158. auch den Widerſtand gegen die Kugel nach der Meinung des H. Muller $P = \frac{1}{4}D^2\pi \cdot \frac{v^2}{4g} \cdot \frac{1}{9}$ ſetzet, und ſodann in der Grundformel

$$vdv = -\frac{2gPdy}{M}$$

für P dieſen Werth, und $\frac{1}{6}D^3\pi N$ für M ſubſtituiret; ſo iſt

$$dy = -12DN \cdot \frac{dv}{v},$$

und für $6DN = r$,

$$dy = -2r \cdot \frac{dv}{v};$$

hieraus folget

$$\text{I. } y = 2r \cdot \text{lognat} \frac{c}{v},$$

weil für $y = 0$ die Geſchwindigkeit $v = c$ iſt.

Setzet man ferner in der zweyten Grundformel der Bewegung $dy = vdt$ ſtatt dy den eben angeführten Werth $-2r \cdot \frac{dv}{v}$; ſo iſt

$$-\frac{2rdv}{v} = vdt, \text{ und}$$

$$dt = -2rv^{-2}dv;$$

Hier-

Fig.

Hieraus folget nun

$$t = 2r\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right),$$

weil für $t = 0$ die Geſchwindigkeit $v = c$ iſt; und endlich iſt für $r = a^2$

$$\text{II. } t = 2a^2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right).$$

Es iſt daher bey der geradlinigen Bewegung auf einer horizontalen Ebene in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel der Zuſammenhang zwiſchen dem zurückgelegten Wege, zwiſchen den Geſchwindigkeiten und zwiſchen der Zeit, wenn man den Widerſtand ſo klein annimmt, als H. Muller denſelben vorausſetzet, durch folgende zwey Gleichungen richtig vorgeſtellet,

$$y = 2r \,.\, \text{lognat} \frac{c}{v},$$

und für $a^2 = r$,

$$t = 2a^2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right)$$

keineswegs aber durch die vom H. Muller durch unrichtige Schlüſſe herausgebrachten, oben bemerkten Formeln

$$y = \tfrac{1}{2}r \,.\, \text{lognat} \frac{r - c^2}{r - v^2},$$

und für $a^2 = r$

$$t = \tfrac{1}{2}a \,.\, \text{lognat} \frac{(a-c)(a+v)}{(a+c)(a-v)}.$$

Da nun die angeführten zwey Gleichungen des Herrn Muller gänzlich unrichtig ſind; ſo iſt auch alles übrige, was er daraus in den zwey genannten Werken von der Beſtimmung der möglich größten Geſchwindigkeit der geſchoſſenen Kugeln nach Verſchiedenheit des Calibers, von der vortheilhafteſten Länge der Geſchützröhre, von der vortheilhafteſten Pulverladung zu einer gegebenen Länge des Geſchützrohres, u. ſ. w. gefolgert hat, unrichtig und ganz verwerf-

Fig. lich. Es wäre zu weitläufig alle dieſe Unrichtigkeiten hier auszuheben, und zu berichtigen. Dieſes könnte nur bey einer vollſtändigen Ueberſetzung des genannten Werkes des H. Muller Appendix or Supplement to the Treatiſe of Artillery geſchehen.

§. 185.

Hier folget noch die oben erwähnte baliſtiſche Tafel, welche bey der Berechnung der Schußweiten in der widerſtehenden Luft mit Vortheile gebrauchet werden kann, wie es aus folgendem Beyſpiele zu erſehen iſt.

Es werde eine 4pfündige eiſerne Kugel, deren Durchmeſſer = 3 Zoll = $\frac{1}{4}$ Fuß iſt, unter einem Erhöhungswinkel von 15 Grad = m mit einer anfänglichen Geſchwindigkeit c = 1200 Fuß aus einem dazu angemeſſenen Geſchütze hinausgeſchoſſen; der Kubikfuß des gegoſſenen Eiſens, woraus die Kugel beſteht, wiege 400 Pfunde, und der Kubikfuß der atmoſphäriſchen, hier von gleichförmiger Dichtigkeit angenommenen Luft, worin die Bewegung der geſchoſſenen Kugel vor ſich geht, wiege 2 Loth = $\frac{1}{16}$ Pfund Wien. Hand. Gew. Man ſoll die Schußweite im Horizonte der Mündung des Geſchützes berechnen.

Dieſe findet man nun durch Beyhülfe der baliſtiſchen Tafel auf folgende Art. Vermöge §. 173. II. iſt

$$\left(h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}} - 1\right) : \frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m} = 1 + \frac{c^2 . \sin 2m}{4ag.\cos\frac{1}{2}m}$$

die Formel, in welcher x die geſuchte Schußweite bedeutet. Weil nun hier $D = \frac{1}{4}$, und $N = 400 : \frac{1}{16} = 6400$ iſt; ſo iſt $DN = 1600$;

und $a = \frac{4}{3} DN = \frac{6400}{3}$, $\log a = 3{,}3290587$

$\log.\cos\frac{1}{2}m = \log.\cos 7^\circ 30' = 0{,}9962686 - 1$

$\log(a.\cos\frac{1}{2}m) = 3{,}3253273$

$g = 15\frac{1}{2}$, $4g = 62$, $\log 4g = 1{,}7923917$

$\log(4ag.\cos\frac{1}{2}m) = 5{,}1177190$

$c^2 =$

$c^2 = 1440000$, $\sin 2m = \sin 30° = \frac{1}{2}$ Fig.

$c^2 . \sin 2m = 720000$; $\log . c^2 \sin 2m = \underline{5,8573325}$

$0,7396135$

hierzu gehöret die Zahl $\frac{c^2 \sin 2m}{4ag \cos \frac{1}{2} m} = 5,4905.$

Und nun hat man die Gleichung

$$\left(h^{\frac{x}{a . \cos \frac{1}{2} m}} - 1\right) : \frac{x}{a . \cos \frac{1}{2} m} = 6,4905$$

woraus ſich mittelſt der baliſtiſchen Tafel der Werth für $\frac{x}{a . \cos \frac{1}{2} m} = n$ beſtimmen läßt.

Denn wenn man in dieser Tafel in der Spalte $\left(\frac{h^n - 1}{n}\right)$ die Zahl 6,4905 aufſuchet; ſo findet man, daß $\frac{x}{a \cos \frac{1}{2} m}$ größer als 3,02 und kleiner als 3,03 ſey; woraus ſodann durch die Einſchaltung mittelſt der Differenzen $\frac{x}{a . \cos \frac{1}{2} m} = 3,0278$ folget;

nähmlich gegebene Zahl $= 6,4905$

nächſt kleinere i. d. Taf. $= \underline{6,4541}$ bey 3,02

Differenz $= 364$

Differenz der Tafel $= 466$

und nun $\frac{364}{466} \times \frac{1}{100} = \underline{0,0078}$

$$\frac{x}{a \cos \frac{1}{2} m} = 3,0278$$

Hiervon $\log \frac{x}{a \cos \frac{1}{2} m} = 0,4811272$

$\log . a \cos \frac{1}{2} m = \underline{3,3253273}$

gibt $\log x = 3,8064545$

 folg-

Fig. folglich iſt die geſuchte Schußweite $x = 6404$ Fuß = 1067 Klafter 2 Fuß.

Wenn man in dieſem Beyſpiele die Schußweite nach der Formel (§. 172. II.)

$$\left(h^{\frac{x}{a}} - 1\right) : \frac{x}{a} = 1 + \frac{c^2 \sin 2m}{4ag}$$

berechnet; ſo findet man $x = 6437$ Fuß.

Wenn hingegen die Luft keinen Widerſtand leiſtete; ſo wäre in dem angeführten Falle nach der paraboliſchen Lehre vermöge (3. Th. §. 77.) die Schußweite $\frac{c^2 \sin 2m}{2g} = 23226$ Fuß. Es iſt hieraus erſichtlich, wie ſehr die Schuß- und Wurfweiten durch den Widerſtand der Luft verkürzet werden.

Aus den angeführten verſchiedenen Formeln zur Berechnung der Schußweite bey der Bewegung in einem widerſtehenden flüſſigen Mittel iſt es erſichtlich, daß bey einerley anfänglichen Geſchwindigkeit, und bey ſonſt gleichen Umſtänden die Kugeln von größeren Durchmeſſern auch größere Tragweiten haben müſſen, als die von kleineren Durchmeſſern, obſchon der Widerſtand des Flüſſigen gegen eine größere Kugel größer iſt, als gegen eine kleinere. Z. B. Der Widerſtand der Luft gegen eine darin bewegte 24 ℔ige Kugel iſt viermahl ſo groß, als gegen eine 3 ℔ige, die ſich mit eben derſelben Geſchwindigkeit in eben derſelben Luft beweget; und doch erreichet bey einerley anfänglichen Geſchwindigkeit unter einerley Elevation die 24 ℔ige Kugel eine viel größere Weite, als die 3 ℔ige, dieſes wird ganz deutlich eingeſehen, wenn man nur erwäget, daß die Verminderung der anfänglichen Geſchwindigkeit eigentlich von dem Werthe des Bruches $\frac{gP}{M}$ in den

Grund-

Grundformeln der Bewegung abhänget. Dieſen Werth kann man hier die Verzögerung der Bewegung wegen des Widerſtandes nennen. Dieſe Verzögerung iſt nun, da P dem Quadrate des Durchmeſſers der bewegten Kugel, und M dem Würfel desſelben bey ſonſt gleichen Umſtänden proportional iſt, bey einer 24℔gen eiſernen Kugel nur halb ſo groß, als bey einer 3℔gen; und deßwegen muß die erſte bey einerley Geſchwindigkeit und Richtung eine größere Weite erreichen, als die zweyte; welches auch mit Erfahrungen und Verſuchen übereinſtimmet.

n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.
0,01	1,0050	0,0051	0,34	1,1910	0,0063	0,67	1,4242	0,0080
0,02	1,0101	51	0,35	1,1973	64	0,68	1,4322	80
0,03	1,0152	51	0,36	1,2037	64	0,69	1,4402	80
0,04	1,0203	51	0,37	1,2101	64	0,70	1,4482	81
0,05	1,0254	52	0,38	1,2165	65	0,71	1,4563	82
0,06	1,0306	52	0,39	1,2230	66	0,72	1,4645	82
0,07	1,0358	53	0,40	1,2296	66	0,73	1,4727	83
0,08	1,0411	53	0,41	1,2362	66	0,74	1,4810	83
0,09	1,0464	53	0,42	1,2428	66	0,75	1,4893	84
0,10	1,0517	54	0,43	1,2494	68	0,76	1,4977	85
0,11	1,0571	54	0,44	1,2562	67	0,77	1,5062	85
0,12	1,0625	54	0,45	1,2629	68	0,78	1,5147	86
0,13	1,0679	55	0,46	1,2697	69	0,79	1,5233	86
0,14	1,0734	55	0,47	1,2766	69	0,80	1,5319	87
0,15	1,0789	55	0,48	1,2835	69	0,81	1,5406	88
0,16	1,0844	56	0,49	1,2904	70	0,82	1,5494	88
0,17	1,0900	56	0,50	1,2974	71	0,83	1,5582	89
0,18	1,0956	57	0,51	1,3045	71	0,84	1,5671	90
0,19	1,1013	57	0,52	1,3116	71	0,85	1,5761	90
0,20	1,1070	57	0,53	1,3187	72	0,86	1,5851	91
0,21	1,1127	58	0,54	1,3259	73	0,87	1,5942	91
0,22	1,1185	58	0,55	1,3332	73	0,88	1,6033	92
0,23	1,1243	59	0,56	1,3405	73	0,89	1,6125	93
0,24	1,1302	59	0,57	1,3478	74	0,90	1,6218	93
0,25	1,1361	59	0,58	1,3552	75	0,91	1,6311	94
0,26	1,1420	60	0,59	1,3627	75	0,92	1,6405	95
0,27	1,1480	60	0,60	1,3702	76	0,93	1,6500	96
0,28	1,1540	61	0,61	1,3778	76	0,94	1,6596	96
0,29	1,1601	61	0,62	1,3854	76	0,95	1,6692	97
0,30	1,1662	61	0,63	1,3930	77	0,96	1,6789	97
0,31	1,1723	62	0,64	1,4007	78	0,97	1,6886	98
0,32	1,1785	62	0,65	1,4085	78	0,98	1,6984	0,0099
0,33	1,1847	63	0,66	1,4163	79	0,99	1,7083	0,0100
0,34	1,1910	0,0063	0,67	1,4242	0,0080	1,00	1,7183	0,0100

n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.
1,01	1,7283	0,0101	1,34	2,1038	0,0128	1,67	2,5821	0,0164
1,02	1,7384	102	1,35	2,1166	130	1,68	2,5985	166
1,03	1,7486	103	1,36	2,1296	130	1,69	2,6151	166
1,04	1,7589	103	1,37	2,1426	131	1,70	2,6317	168
1,05	1,7692	104	1,38	2,1557	132	1,71	2,6485	169
1,06	1,7796	105	1,39	2,1689	134	1,72	2,6654	171
1,07	1,7901	105	1,40	2,1823	134	1,73	2,6825	171
1,08	1,8006	107	1,41	2,1957	135	1,74	2,6996	173
1,09	1,8113	107	1,42	2,2092	137	1,75	2,7169	174
1,10	1,8220	108	1,43	2,2229	137	1,76	2,7343	176
1,11	1,8328	108	1,44	2,2366	138	1,77	2,7519	177
1,12	1,8436	110	1,45	2,2504	140	1,78	2,7696	178
1,13	1,8546	110	1,46	2,2644	140	1,79	2,7874	180
1,14	1,8656	111	1,47	2,2784	141	1,80	2,8054	181
1,15	1,8767	112	1,48	2,2925	143	1,81	2,8235	182
1,16	1,8879	112	1,49	2,3068	143	1,82	2,8417	183
1,17	1,8991	114	1,50	2,3211	145	1,83	2,8600	186
1,18	1,9105	114	1,51	2,3356	146	1,84	2,8786	186
1,19	1,9219	115	1,52	2,3502	146	1,85	2,8972	188
1,20	1,9334	116	1,53	2,3648	148	1,86	2,9160	189
1,21	1,9450	117	1,54	2,3796	149	1,87	2,9349	191
1,22	1,9567	118	1,55	2,3945	150	1,88	2,9540	192
1,23	1,9685	118	1,56	2,4095	151	1,89	2,9732	194
1,24	1,9803	120	1,57	2,4246	152	1,90	2,9926	195
1,25	1,9923	120	1,58	2,4398	154	1,91	3,0121	196
1,26	2,0043	121	1,59	2,4552	154	1,92	3,0317	199
1,27	2,0164	122	1,60	2,4706	156	1,93	3,0516	199
1,28	2,0286	123	1,61	2,4862	157	1,94	3,0715	201
1,29	2,0409	124	1,62	2,5019	158	1,95	3,0916	203
1,30	2,0533	125	1,63	2,5177	159	1,96	3,1119	204
1,31	2,0658	126	1,64	2,5336	161	1,97	3,1323	206
1,32	2,0784	126	1,65	2,5497	162	1,98	3,1529	207
1,33	2,0910	128	1,66	2,5659	162	1,99	3,1736	209
1,34	2,1038	0,0128	1,67	2,5821	0,0164	2,00	3,1945	0,0211

n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.
2,01	3,2156	0,0212	2,34	4,0090	0,0274	2,67	5,0336	0,0354
2,02	3,2368	214	2,35	4,0364	276	2,68	5,0690	357
2,03	3,2582	215	2,36	4,0040	277	2,69	5,1047	359
2,04	3,2797	217	2,37	4,0917	280	2,70	5,1406	362
2,05	3,3014	219	2,38	4,1197	282	2,71	5,1768	365
2,06	3,3233	220	2,39	4,1479	284	2,72	5,2133	368
2,07	3,3453	222	2,40	4,1763	287	2,73	5,2501	371
2,08	3,3675	224	2,41	4,2050	288	2,74	5,2872	374
2,09	3,3899	226	2,42	4,2338	291	2,75	5,3246	376
2,10	3,4125	227	2,43	4,2629	293	2,76	5,3622	380
2,11	2,4352	229	2,44	4,2922	296	2,77	5,4002	383
2,12	3,4581	231	2,45	4,3218	297	2,78	5,4385	385
2,13	3,4812	232	2,46	4,3515	300	2,79	5,4770	389
2,14	3,5044	234	2,47	4,3815	303	2,80	5,5150	392
2,15	3,5278	237	2,48	4,4118	305	2,81	5,5551	395
2,16	3,5515	237	2,49	4,4423	306	2,82	5,5946	398
2,17	3,5752	240	2,50	4,4729	310	2,83	5,6344	401
2,18	3,5992	242	2,51	4,5039	312	2,84	5,6745	405
2,19	3,0234	243	2,52	4,5351	315	2,85	5,7150	408
2,20	3,6477	246	2,53	4,5666	317	2,86	5,7558	411
2,21	3,6723	247	2,54	4,5983	319	2,87	5,7969	414
2,22	3,6970	249	2,55	4,6302	322	2,88	5,8383	417
2,23	3,7219	251	2,56	4,6624	324	2,89	5,8800	421
2,24	3,7470	253	2,57	4,6948	327	2,90	5,9221	424
2,25	3,7723	255	2,58	4,7275	330	2,91	5,9645	428
2,26	3,7978	257	2,59	4,7605	332	2,92	6,0073	431
2,27	3,8235	259	2,60	4,7937	335	2,93	6,0504	434
2,28	3,8494	261	2,61	4,8272	337	2,94	6,0938	438
2,29	3,8755	263	2,62	4,8609	340	2,95	6,1376	441
2,30	3,9018	265	2,63	4,8949	343	2,96	6,1817	445
2,31	3,9283	267	2,64	4,9292	346	2,97	6,2262	448
2,32	3,9550	269	2,65	4,9638	348	2,98	6,2710	452
2,33	3,9819	271	2,66	4,9986	350	2,99	6,3162	456
2,34	4,0090	0,0274	2,67	5,0336	0,0354	3,00	6,3618	0,0460

n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.
3,01	6,4078	0,0463	3,34	8,1494	0,0603	3,67	10,423	0,079
3,02	6,4541	466	3,35	8,2097	609	3,68	10,502	79
3,03	6,5007	470	3,36	8,2706	613	3,69	10,581	80
3,04	6,5477	474	3,37	8,3319	618	3,70	10,661	81
3,05	6,5951	478	3,38	8,3937	623	3,71	10,742	82
3,06	6,6429	482	3,39	8,4560	628	3,72	10,824	82
3,07	6,6911	486	3,40	8,5188	634	3,73	10,906	83
3,08	6,7397	490	3,41	8,5822	638	3,74	10,989	83
3,09	6,7887	493	3,42	8,6460	643	3,75	11,072	84
3,10	6,8380	498	3,43	8,7103	649	3,76	11,156	85
3,11	6,8878	501	3,44	8,7752	654	3,77	11,241	86
3,12	6,9379	506	3,45	8,8406	660	3,78	11,327	86
3,13	6,9885	509	3,46	8,9066	665	3,79	11,413	87
3,14	7,0394	514	3,47	8,9731	670	3,80	11,500	88
3,15	7,0908	518	3,48	9,0401	676	3,81	11,588	88
3,16	7,1426	522	3,49	9,1077	681	3,82	11,676	90
3,17	7,1948	526	3,50	9,1758	687	3,83	11,766	90
3,18	7,2474	530	3,51	9,2445	692	3,84	11,856	91
3,19	7,3004	535	3,52	9,3137	699	3,85	11,947	91
3,20	7,3539	539	3,53	9,3836	703	3,86	12,038	92
3,21	7,4078	543	3,54	9,4539	709	3,87	12,130	93
3,22	7,4621	548	3,55	9,5248	716	3,88	12,223	93
3,23	7,5169	552	3,56	9,5964	721	3,89	12,316	95
3,24	7,5721	556	3,57	9,6685	727	3,90	12,411	95
3,25	7,6277	562	3,58	9,7412	733	3,91	12,506	96
3,26	7,6839	565	3,59	9,8145	739	3,92	12,602	97
3,27	7,7404	571	3,60	9,8884	745	3,93	12,699	98
3,28	7,7975	574	3,61	9,9629	0,075	3,94	12,797	98
3,29	7,8549	580	3,62	10,038	76	3,95	12,895	0,099
3,30	7,9129	584	3,63	10,114	76	3,96	12,994	0,100
3,31	7,9713	589	3,64	10,190	77	3,97	13,094	101
3,32	8,0302	594	3,65	10,267	78	3,98	13,195	102
3,33	8,0896	598	3,66	10,345	78	3,99	13,297	103
3,34	8,1494	0,0603	3,67	10,423	0,079	4,00	13,400	0,104

n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ
4,01	13,503	0,104	4,34	17,444	0,137	4,67	22,633	0,181
4,02	13,607	105	4,35	17,581	138	4,68	22,814	182
4,03	13,712	106	4,36	17,719	140	4,69	22,996	184
4,04	13,818	107	4,37	17,859	141	4,70	23,180	185
4,05	13,925	108	4,38	18,000	141	4,71	23,365	187
4,06	14,033	109	4,39	18,141	143	4,72	23,552	189
4,07	14,142	109	4,40	18,284	144	4,73	23,741	190
4,08	14,251	111	4,41	18,428	145	4,74	23,931	192
4,09	14,362	111	4,42	18,573	147	4,75	24,123	193
4,10	14,473	113	4,43	18,720	148	4,76	24,316	195
4,11	14,586	113	4,44	18,868	149	4,77	24,511	197
4,12	14,699	114	4,45	19,017	150	4,78	24,708	198
4,13	14,813	115	4,46	19,167	152	4,79	24,906	200
4,14	14,928	116	4,47	19,319	153	4,80	25,106	202
4,15	15,044	117	4,48	19,472	154	4,81	25,308	203
4,16	15,161	118	4,49	19,626	155	4,82	25,511	205
4,17	15,279	120	4,50	19,781	157	4,83	25,716	207
4,18	15,399	120	4,51	19,938	158	4,84	25,923	209
4,19	15,519	121	4,52	20,096	159	4,85	26,132	210
4,20	15,640	122	4,53	20,255	161	4,86	26,342	212
4,21	15,762	123	4,54	20,416	163	4,87	26,554	214
4,22	15,885	124	4,55	20,579	163	4,88	26,768	216
4,23	16,009	125	4,56	20,742	165	4,89	26,984	218
4,24	16,134	126	4,57	20,907	166	4,90	27,202	219
4,25	16,260	127	4,58	21,073	168	4,91	27,421	221
4,26	16,387	129	4,59	21,241	169	4,92	27,642	224
4,27	16,516	129	4,60	21,410	170	4,93	27,866	225
4,28	16,645	130	4,61	21,580	172	4,94	28,091	227
4,29	16,775	132	4,62	21,752	173	4,95	28,318	229
4,30	16,907	133	4,63	21,925	175	4,96	28,547	231
4,31	17,040	133	4,64	22,100	176	4,97	28,778	233
4,32	17,173	135	4,65	22,276	178	4,98	29,011	234
4,33	17,308	136	4,66	22,454	179	4,99	29,245	237
4,34	17,444	0,137	4,67	22,633	0,181	5,00	29,482	0,239

n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.
5,01	29,721	0,241	5,34	38,860	0,319	5,67	50,976	0,423
5,02	29,962	243	5,35	39,179	321	5,68	51,399	427
5,03	30,205	245	5,36	39,500	325	5,69	51,826	431
5,04	30,450	247	5,37	39,825	328	5,70	52,257	434
5,05	30,697	250	5,38	40,153	330	5,71	52,691	439
5,06	30,947	251	5,39	40,483	333	5,72	53,130	442
5,07	31,198	253	5,40	40,816	336	5,73	53,572	446
5,08	31,451	256	5,41	41,152	339	5,74	54,018	450
5,09	31,707	258	5,42	41,491	341	5,75	54,468	454
5,10	31,965	260	5,43	41,832	344	5,76	54,922	457
5,11	32,225	262	5,44	42,176	348	5,77	55,379	462
5,12	32,487	264	5,45	42,524	351	5,78	55,841	465
5,13	32,751	267	5,46	42,875	354	5,79	56,306	469
5,14	33,018	269	5,47	43,229	356	5,80	56,775	474
5,15	33,287	271	5,48	43,585	359	5,81	57,249	478
5,16	33,558	274	5,49	43,944	363	5,82	57,727	482
5,17	33,832	276	5,50	44,307	366	5,83	58,209	486
5,18	34,108	279	5,51	44,673	369	5,84	58,695	490
5,19	34,387	280	5,52	45,042	372	5,85	59,185	494
5,20	34,667	283	5,53	45,414	376	5,86	59,679	499
5,21	34,950	286	5,54	45,790	379	5,87	60,178	503
5,22	35,236	288	5,55	46,169	382	5,88	60,681	508
5,23	35,524	290	5,56	46,551	385	5,89	61,189	512
5,24	35,814	293	5,57	46,936	388	5,90	61,701	516
5,25	36,107	296	5,58	47,324	392	5,91	62,217	521
5,26	36,403	298	5,59	47,716	395	5,92	62,738	526
5,27	36,701	300	5,60	48,111	399	5,93	63,264	530
5,28	37,001	304	5,61	48,510	402	5,94	63,794	534
5,29	37,305	305	5,62	48,912	406	5,95	64,328	539
5,30	37,610	308	5,63	49,318	409	5,96	64,867	544
5,31	37,918	312	5,64	49,727	413	5,97	65,411	549
5,32	38,230	314	5,65	50,140	416	5,98	65,960	553
5,33	38,544	316	5,66	50,556	420	5,99	66,513	558
5,34	38,860	0,319	5,67	50,976	0,423	6,00	67,071	0,563

n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.
6,01	67,634	0,568	6,34	89,242	0,757	6,67	118,05	1,01
6,02	68,202	0,573	6,35	89,999	763	6,68	119,06	1,02
6,03	68,775	0,578	6,36	90,762	770	6,69	120,08	1,03
6,04	69,353	583	6,37	91,532	776	6,70	121,11	1,04
6,05	69,936	588	6,38	92,308	784	6,71	122,14	1,05
6,06	70,524	593	6,39	93,092	790	6,72	123,19	1,05
6,07	71,117	598	6,40	93,882	797	6,73	124,24	1,07
6,08	71,715	603	6,41	94,679	804	6,74	125,31	1,07
6,09	72,318	609	6,42	95,483	811	6,75	126,38	1,08
6,10	72,927	614	6,43	96,294	818	6,76	127,46	1,09
6,11	73,541	619	6,44	97,112	826	6,77	128,55	1,11
6,12	74,160	625	6,45	97,938	833	6,78	129,66	1,11
6,13	74,785	630	6,46	98,771	840	6,79	130,77	1,12
6,14	75,415	636	6,47	99,611	0,85	6,80	131,89	1,13
6,15	76,051	641	6,48	100,46	85	6,81	133,02	1,14
6,16	76,692	647	6,49	101,31	87	6,82	134,16	1,15
6,17	77,339	653	6,50	102,18	87	6,83	135,31	1,17
6,18	77,992	658	6,51	103,05	87	6,84	136,48	1,17
6,19	78,650	664	6,52	103,92	89	6,85	137,65	1,18
6,20	79,314	670	6,53	104,81	89	6,86	138,83	1,19
6,21	79,984	676	6,54	105,70	90	6,87	140,02	1,21
6,22	80,660	681	6,55	106,60	91	6,88	141,23	1,21
6,23	81,341	687	6,56	107,51	92	6,89	142,44	1,22
6,24	82,028	694	6,57	108,43	92	6,90	143,66	1,24
6,25	82,722	700	6,58	109,35	94	6,91	144,90	1,24
6,26	83,422	705	6,59	110,29	94	6,92	146,14	1,26
6,27	84,127	712	6,60	111,23	95	6,93	147,40	1,27
6,28	84,839	718	6,61	112,18	95	6,94	148,67	1,28
6,29	85,557	724	6,62	113,13	97	6,95	149,95	1,29
6,30	86,281	731	6,63	114,10	97	6,96	151,24	1,30
6,31	87,012	737	6,64	115,07	99	6,97	152,54	1,31
6,32	87,749	743	6,65	116,06	0,99	6,98	153,85	1,33
6,33	88,492	750	6,66	117,05	1,00	6,99	155,18	1,34
6,34	89,242	0,757	6,67	118,05	1,01	7,00	156,52	1,34

n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.
7,01	157,86	1,36	7,34	209,77	1,82	7,67	279,28	2,44
7,02	159,22	1,38	7,35	211,59	1,84	7,68	281,72	2,46
7,03	160,60	1,38	7,36	213,43	1,85	7,69	284,18	2,48
7,04	161,98	1,40	7,37	215,28	1,87	7,70	286,66	2,51
7,05	163,38	1,41	7,38	217,15	1,89	7,71	289,17	2,53
7,06	164,79	1,42	7,39	219,04	1,90	7,72	291,70	2,56
7,07	166,21	1,44	7,40	220,94	1,92	7,73	294,26	2,57
7,08	167,65	1,45	7,41	222,86	1,94	7,74	296,83	2,60
7,09	169,10	1,46	7,42	224,80	1,96	7,75	299,43	2,62
7,10	170,56	1,47	7,43	226,76	1,97	7,76	302,05	2,64
7,11	172,03	1,48	7,44	228,73	1,99	7,77	304,69	2,67
7,12	173,51	1,50	7,45	230,72	2,01	7,78	307,36	2,69
7,13	175,01	1,52	7,46	232,73	2,02	7,79	310,05	2,72
7,14	176,53	1,52	7,47	234,75	2,04	7,80	312,77	2,74
7,15	178,05	1,54	7,48	236,79	2,06	7,81	315,51	2,76
7,16	179,59	1,56	7,49	238,85	2,09	7,82	318,27	2,79
7,17	181,15	1,56	7,50	240,94	2,10	7,83	321,06	2,82
7,18	182,71	1,58	7,51	243,04	2,12	7,84	323,88	2,84
7,19	184,29	1,60	7,52	245,16	2,13	7,85	326,72	2,86
7,20	185,89	1,62	7,53	247,29	2,15	7,86	329,58	2,89
7,21	187,51	1,62	7,54	249,44	2,18	7,87	332,47	2,92
7,22	189,13	1,63	7,55	251,62	2,19	7,88	335,39	2,94
7,23	190,76	1,65	7,56	253,81	2,21	7,89	338,33	2,97
7,24	192,41	1,67	7,57	256,02	2,24	7,90	341,30	3,00
7,25	194,08	1,68	7,58	258,26	2,26	7,91	344,30	3,02
7,26	195,76	1,69	7,59	260,52	2,27	7,92	347,32	3,05
7,27	197,45	1,72	7,60	262,79	2,29	7,93	350,37	3,08
7,28	199,17	1,72	7,61	265,08	2,32	7,94	353,45	3,10
7,29	200 90	1,74	7,62	267,40	2,33	7,95	356,55	3,13
7,30	202,64	1,76	7,63	269,73	2,35	7,96	359,68	3,16
7,31	204,40	1,77	7,64	272,08	2,38	7,97	362,84	3,19
7,32	206,17	1,79	7,65	274,46	2,40	7,98	366,03	3,21
7,33	207,96	1,81	7,66	276,86	2,42	7,99	369,24	3,25
7,34	209,77	1,82	7,67	279,28	2,44	8,00	372,49	3,28

n	$\frac{h^n - 1}{1}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.
8,01	375,77	3,30	8,34	502,05	4,44	8,67	671,80	5,97
8,02	379,07	3,33	8,35	506,49	4,48	8,68	677,77	6,02
8,03	382,40	3,37	8,36	510,97	4,52	8,69	683,79	6,08
8,04	385,77	3,40	8,37	515,49	4,56	8,70	689,87	6,14
8,05	389,17	3,42	8,38	520,05	4,60	8,71	696,01	6,19
8,06	392,59	3,45	8,39	524,65	4,64	8,72	702,20	6,24
8,07	396,04	3,49	8,40	529,29	4,69	8,73	708,44	6,30
8,08	399,53	3,52	8,41	533,98	4,73	8,74	714,74	6,36
8,09	403,05	3,55	8,42	538,71	4,77	8,75	721,10	6,42
8,10	406,60	3,58	8,43	543,48	4,81	8,76	727,52	6,48
8,11	410,18	3,61	8,44	548,29	4,85	8,77	734,00	6,53
8,12	413,79	3,65	8,45	553,14	4,90	8,78	740,53	6,60
8,13	417,44	3,68	8,46	558,04	4,95	8,79	747,13	6,65
8,14	421,12	3,71	8,47	562,99	4,99	8,80	753,78	6,71
8,15	424,83	3,74	8,48	567,98	5,03	8,81	760,49	6,77
8,16	428,57	3,78	8,49	573,01	5,08	8,82	767,26	6,83
8,17	432,35	3,81	8,50	578,09	5,12	8,83	774,09	6,90
8,18	436,16	3,85	8,51	583,21	5,17	8,84	780,99	6,96
8,19	440,01	3,88	8,52	588,38	5,22	8,85	787,95	7,02
8,20	443,89	3,92	8,53	593,60	5,27	8,86	794,97	7,09
8,21	447,81	3,95	8,54	598,87	5,31	8,87	802,06	7,15
8,22	451,76	3,99	8,55	604,18	5,36	8,88	809,21	7,21
8,23	455,75	4,02	8,56	609,54	5,41	8,89	816,42	7,28
8,24	459,77	4,06	8,57	614,95	5,46	8,90	823,70	7,35
8,25	463,83	4,10	8,58	620,41	5,50	8,91	831,05	7,41
8,26	467,93	4,13	8,59	625,91	5,56	8,92	838,46	7,48
8,27	472,06	4,17	8,60	631,47	5,61	8,93	845,94	7,55
8,28	476,23	4,21	8,61	637,08	5,66	8,94	853,49	7,62
8,29	480,44	4,24	8,62	642,74	5,70	8,95	861,11	7,68
8,30	484,68	4,29	8,63	648,44	5,76	8,96	868,79	7,75
8,31	488,97	4,32	8,64	654,20	5,81	8,97	876,54	7,82
8,32	493,29	4,36	8,65	660,01	5,87	8,98	884,36	7,90
8,33	497,65	4,40	8,66	665,88	5,92	8,99	892,26	7,97
8,34	502,05	4,44	8,67	671,80	5,97	9,00	900,23	8,04

n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.
9,01	903,27	8,11	9,34	1218,7	11,0	9,67	1637,4	14,8
9,02	916,38	8,19	9,35	1229,7	11,0	9,68	1652,2	14,9
9,03	924,57	8,26	9,36	1240,7	11,1	9,69	1667,1	15,0
9,04	932,83	8,33	9,37	1251,8	11,3	9,70	1682,1	15,2
9,05	941,16	8,41	9,38	1263,1	11,4	9,71	1697,3	15,3
9,06	949,57	8,49	9,39	1274,5	11,4	9,72	1712,6	15,4
9,07	958,06	8,56	9,40	1285,9	11,5	9,73	1728,0	15,6
9,08	966,62	8,64	9,41	1297,4	11,7	9,74	1743,6	15,7
9,09	975,26	8,73	9,42	1309,1	11,7	9,75	1759,3	15,8
9,10	983,99	8,80	9,43	1320,8	11,9	9,76	1775,1	16,0
9,11	992,79	8,91	9,44	1332,7	11,9	9,77	1791,1	16,2
9,12	1001,7	8,9	9,45	1344,6	12,1	9,78	1807,3	16,3
9,13	1010,6	9,1	9,46	1356,7	12,2	9,79	1823,6	16,4
9,14	1019,7	9,1	9,47	1368,9	12,3	9,80	1840,0	16,6
9,15	1028,8	9,2	9,48	1381,2	12,4	9,81	1856,6	16,8
9,16	1038,0	9,3	9,49	1393,6	12,5	9,82	1873,4	16,9
9,17	1047,3	9,4	9,50	1406,1	12,7	9,83	1890,3	17,1
9,18	1056,7	9,4	9,51	1418,8	12,8	9,84	1907,4	17,2
9,19	1066,1	9,6	9,52	1431,6	12,8	9,85	1924,6	17,4
9,20	1075,7	9,6	9,53	1444,4	13,0	9,86	1942,0	17,5
9,21	1085,3	9,7	9,54	1457,4	13,1	9,87	1959,5	17,7
9,22	1095,0	9,8	9,55	1470,5	13,2	9,88	1977,2	17,8
9,23	1104,8	9,9	9,56	1483,7	13,4	9 89	1995,0	18,0
9,24	1114,7	10,0	9,57	1497,1	13,4	9,90	2013,0	18,2
9,25	1124,7	10,1	9,58	1510,5	13,6	9,91	2031,2	18,4
9,26	1134,8	10,2	9,59	1524,1	13,7	9,92	2049,6	18,5
9,27	1145,0	10,2	9,60	1537,8	13,9	9,93	2068,1	18,7
9,28	1155,2	10,3	9,61	1551,7	14,0	9,94	2086,8	18,8
9,29	1165,5	10,5	9,62	1565,7	14,1	9,95	2105,6	19,0
9,30	1176,0	10,6	9,63	1579,8	14,2	9,96	2124,6	19,2
9,31	1186,6	10,6	9,64	1594,0	14,3	9,97	2143,8	19,4
9,32	1197,2	10,7	9,65	1608,3	14,5	9,98	2163,2	19,6
9,33	1207,9	10,8	9,56	1622,8	14,6	9,99	2182,8	19,8
9,34	1218,7	11,0	9,67	1637,4	14,8	10,00	2202,6	20,0

Verbeſſerungen.

Seite	Zeile	Fehler	Verbeſſerung.
16	9	Druck MGN	Druck von MGN
98	33	oll	Soll
236	24	die Geſchwindigkeit unausgeſetzt	die Geſchwindigkeit der Kugel unausgeſetzt
246	2	oder auch	oder auch in
255	32	1,05	10,5
295	28	der Seele Kanone	der Seele der Kanone.

Nebſt den in meiner Anleitung zur Mechanik der feſten Körper angekündigten Fehlern der Fortſetzung der Primzahlen in dem II. Bande der logarithmiſch - trigonometriſchen Tafeln von Vega ſind noch folgende zu verbeſſern.

Die Zahlen 194107=73.2659; 232163=179.1297; 235303=167.1409; 242939=379.641; 247669=53.4673; 252651=3.84217; 273596=2.136798; 320419=191.1709; 331927=37.8971; 336467=23.14629; 339971=109.3119; 357853=449.797; 358837=281.1277; 359741=163.2207; 371269=139.2671; 397457=239.1663 ſind auszuſtreichen, dafür aber folgende einzuſchalten.

232103, 235003, 242639, 247609, 273569, 326119, 330509, 331921, 336437, 339671, 357817, 357883, 371299, 397427. Die angezeigten Fehler ſind auch in der neuen Auflage aufgenommen worden.

Lindner.

TAB. I.

Fig. 2.

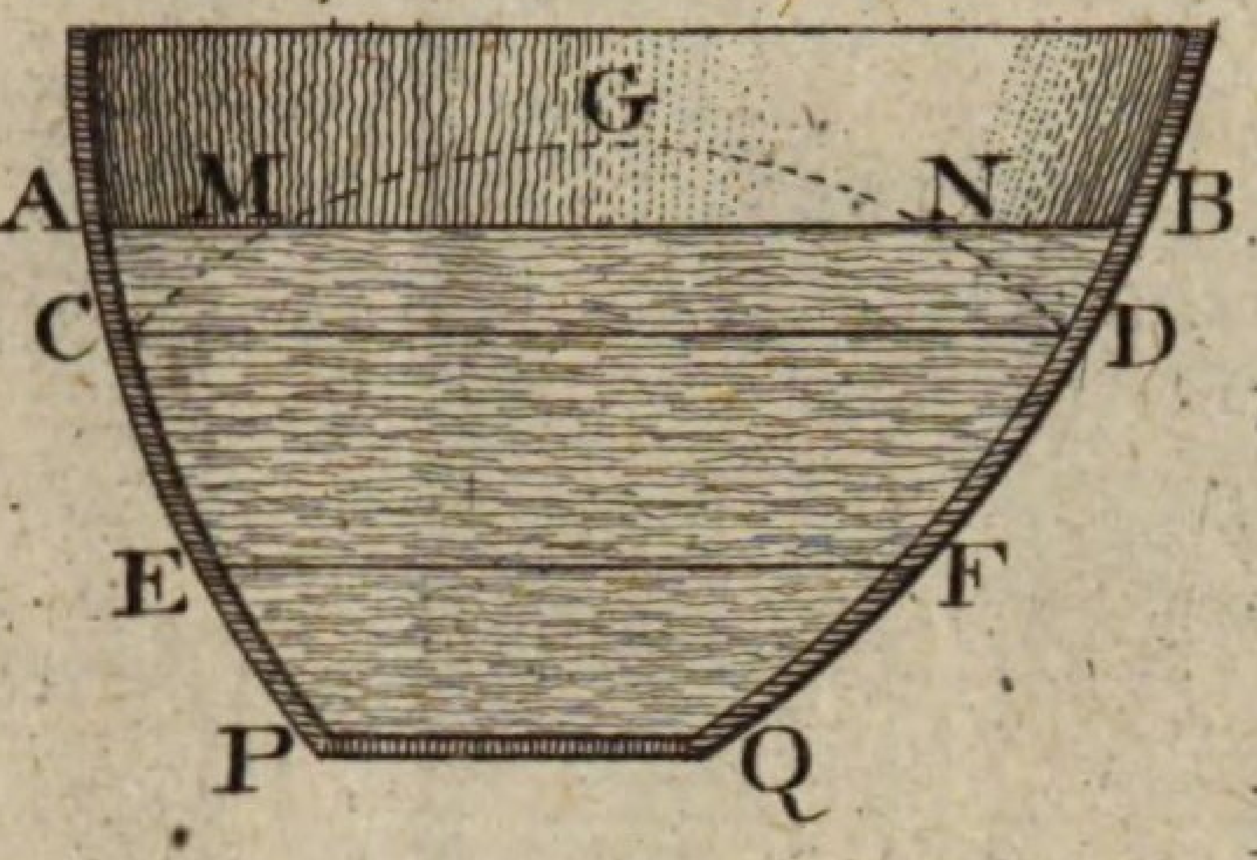


Fig. 3.

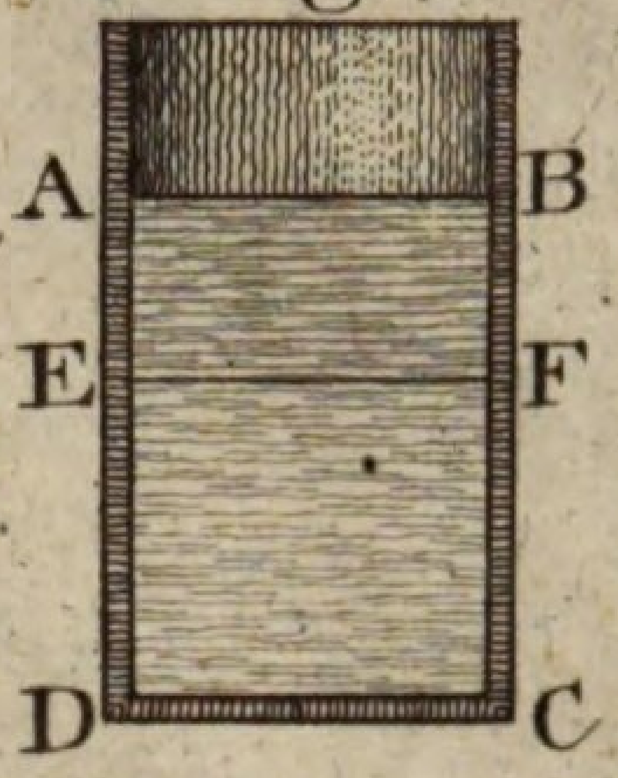


Fig. 5.

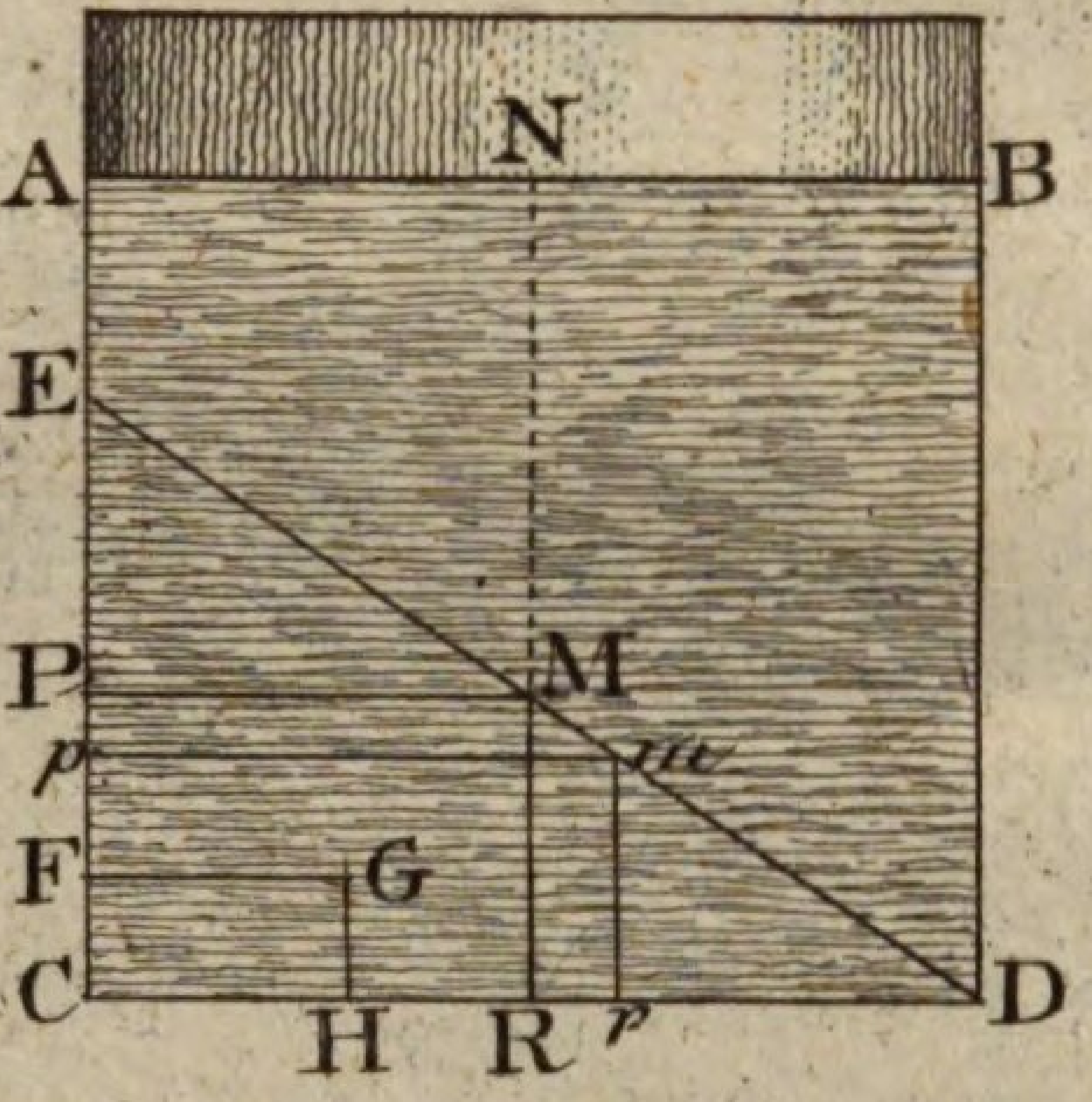


Fig. 7.

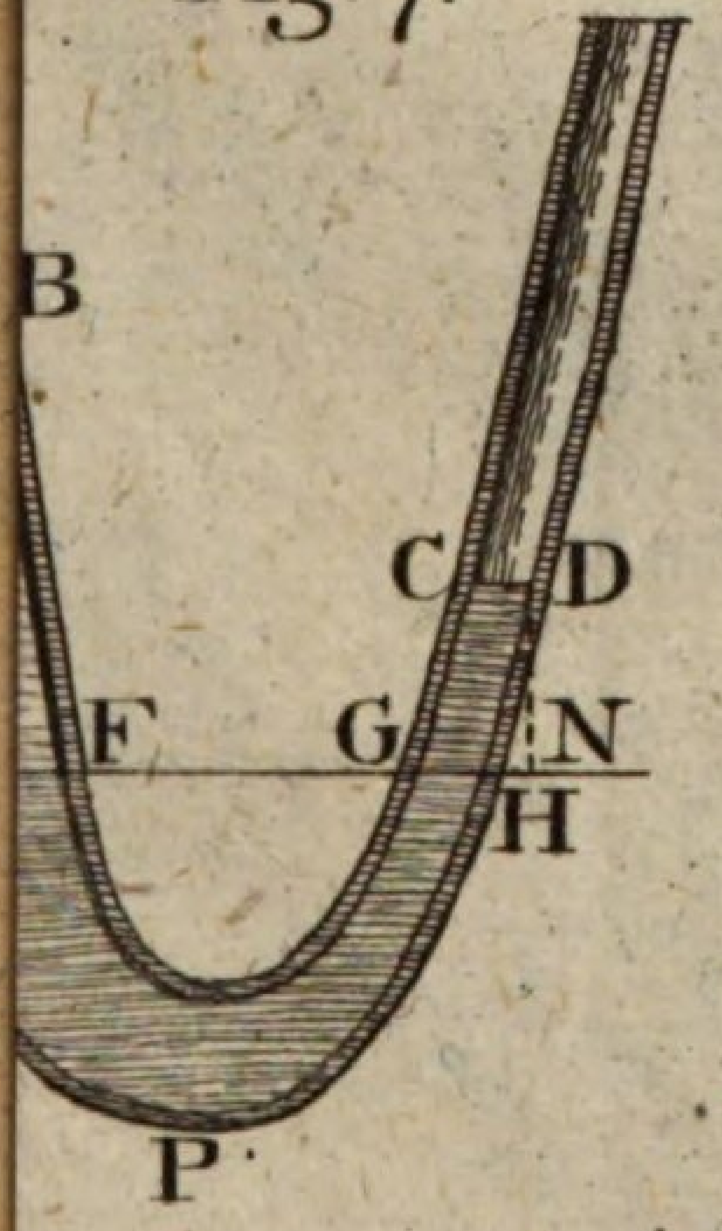
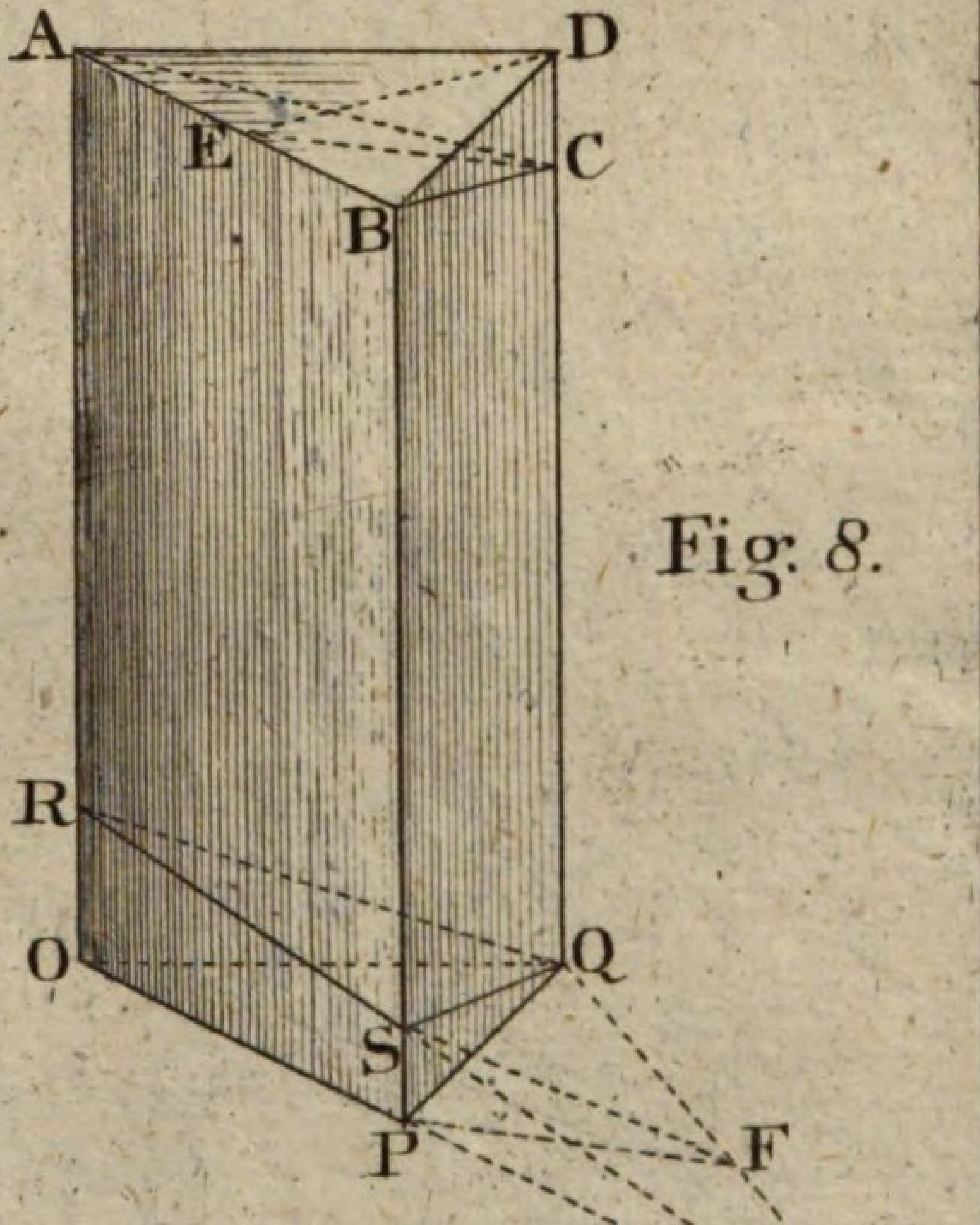


Fig. 8.



Lucas Benedicti sc.

Fig. 10.

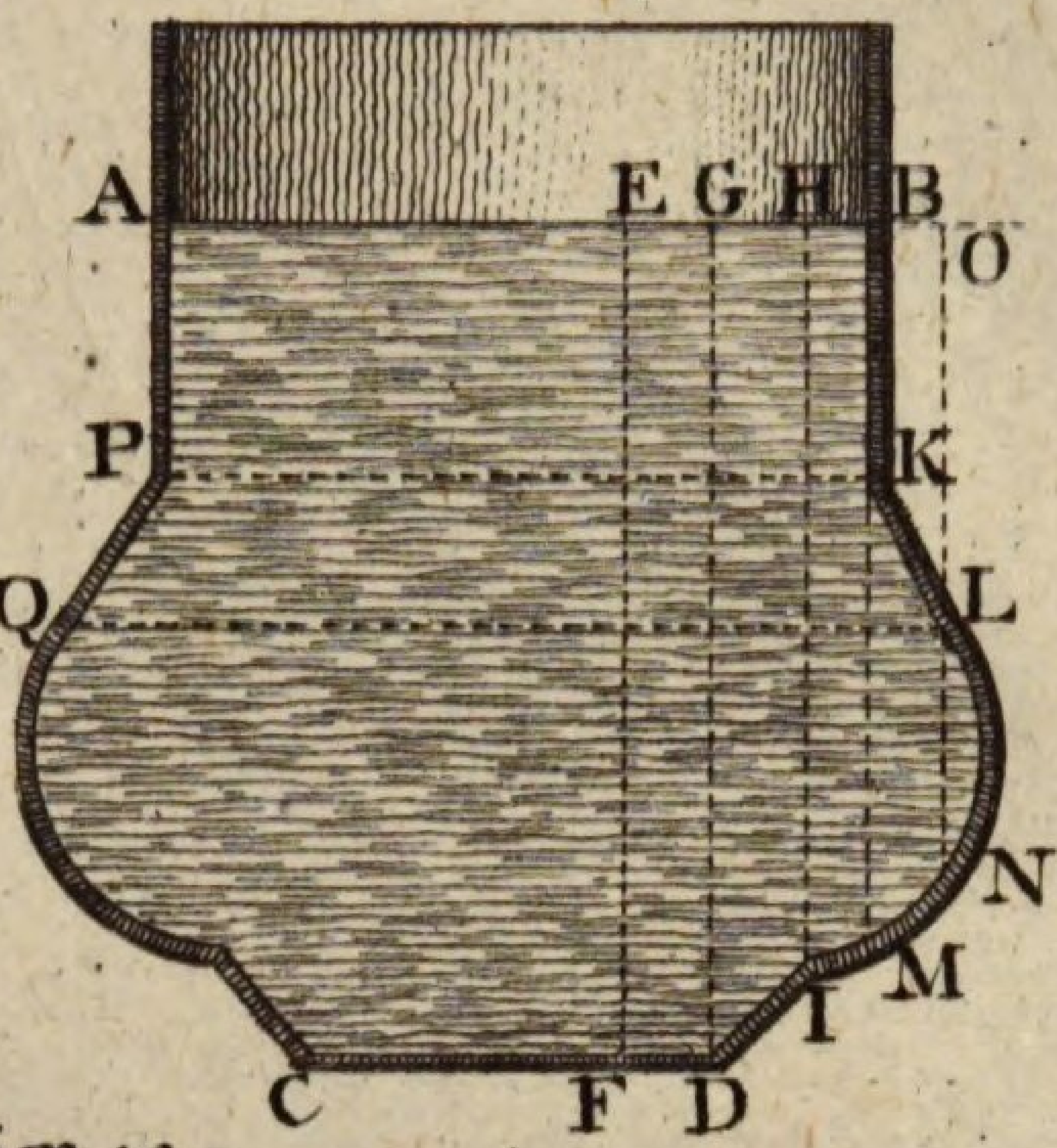


Fig. 12.

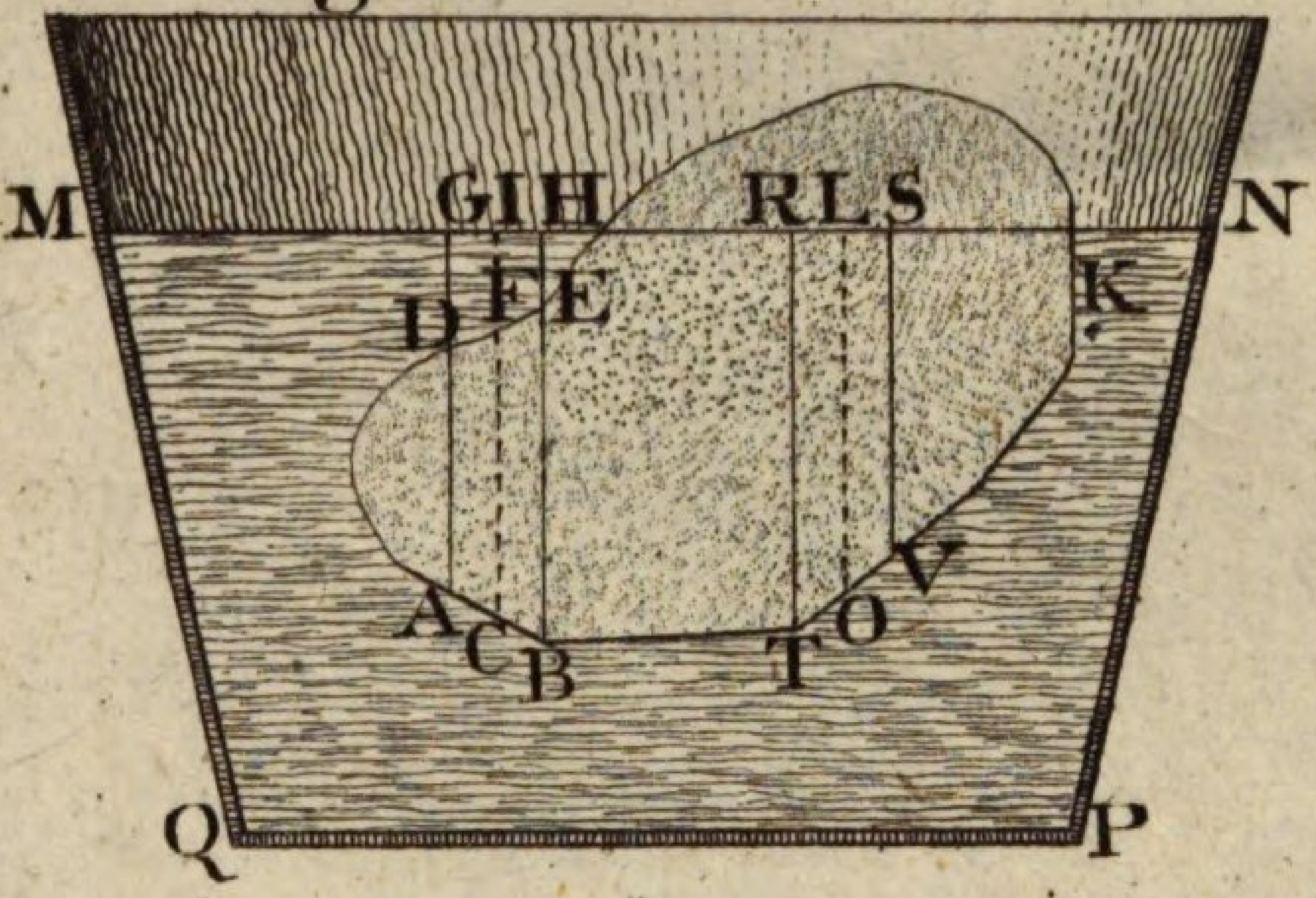
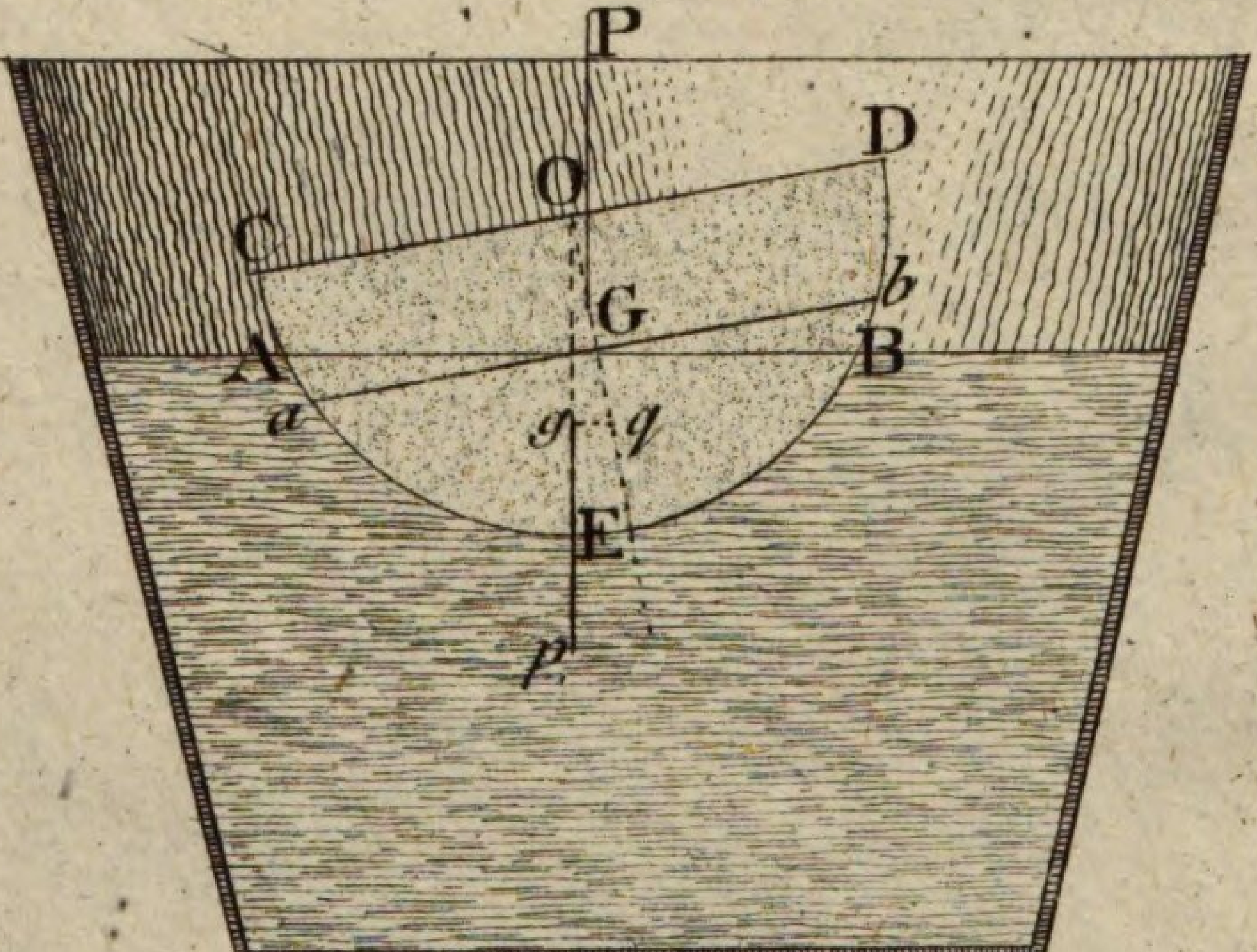


Fig. 14.



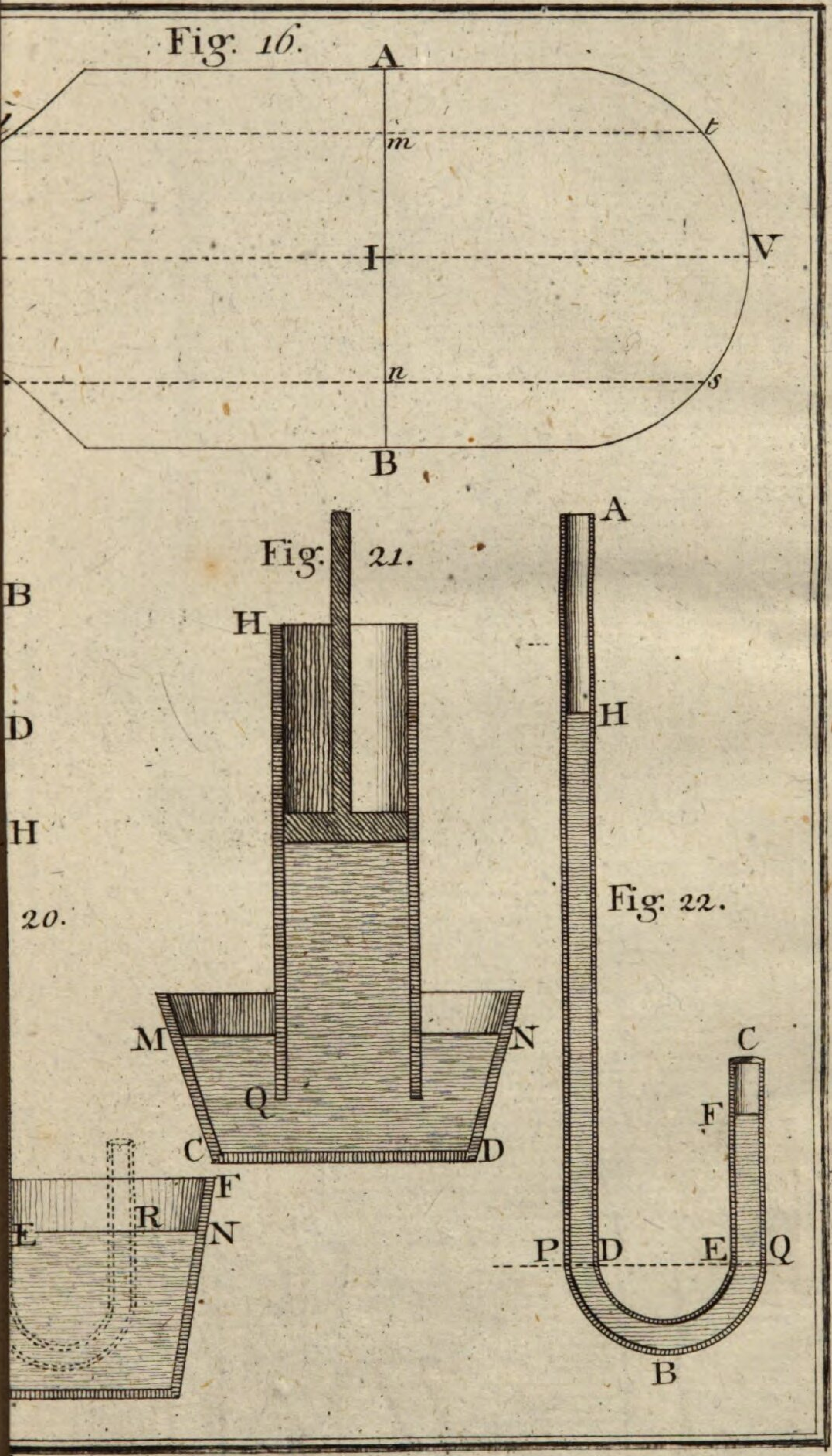


Fig. 16.
A
m
t
I
V
n
s
B
Fig. 21.
H
M
N
Q
C
D
Fig. 22.
A
H
C
F
P
D
E
Q
B
B
D
H
20.
F
R
E
N

TAB. IV.

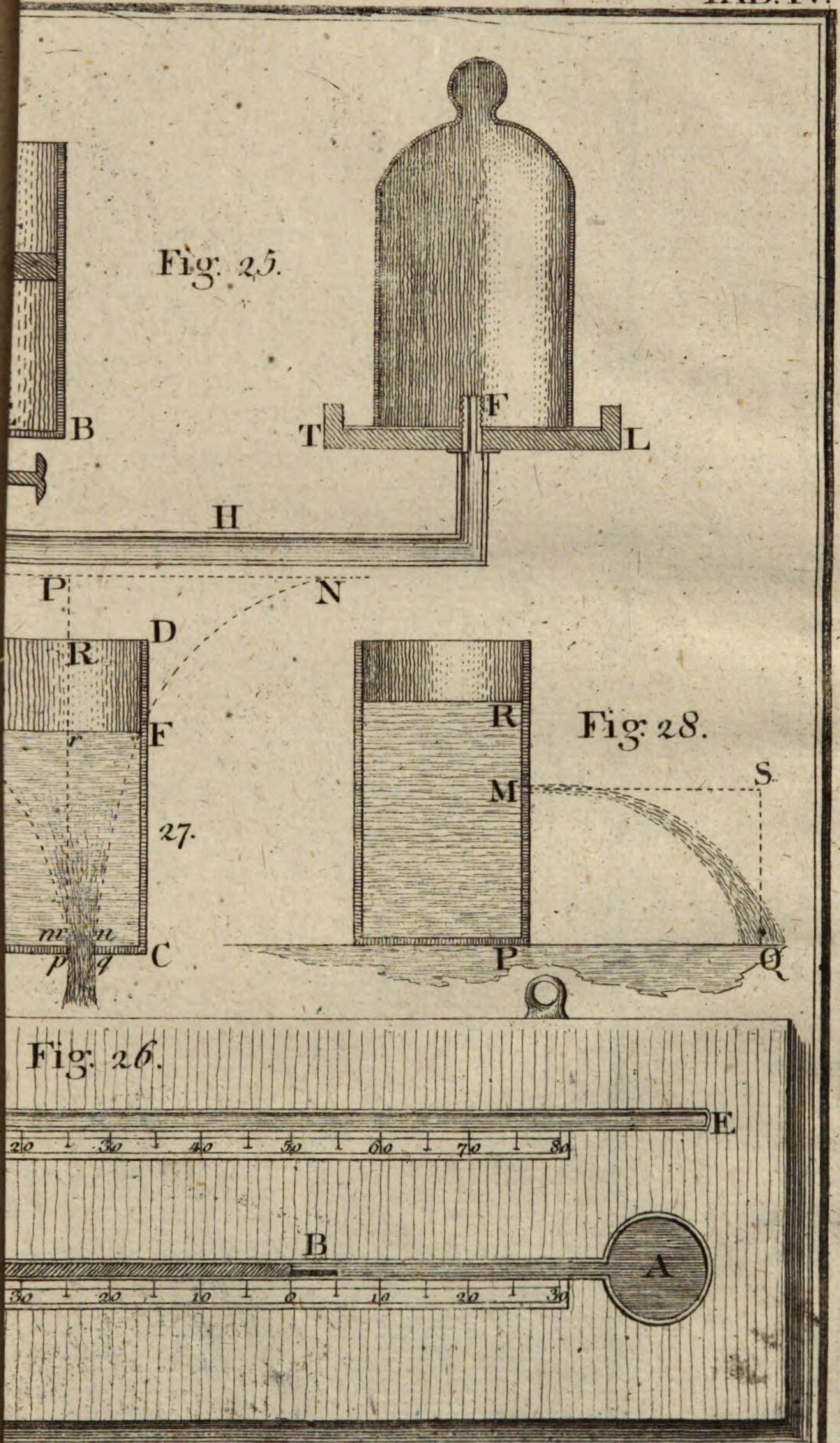


Fig. 25.
B
F
T
L
H
P
N
D
R
F
r
27.
m n
p q
C
Fig. 28.
R
M
S
P
Q
Fig. 26.
E
20 30 40 50 60 70 80
B
A
30 20 10 0 10 20 30

TAB. V.

Fig. 30.

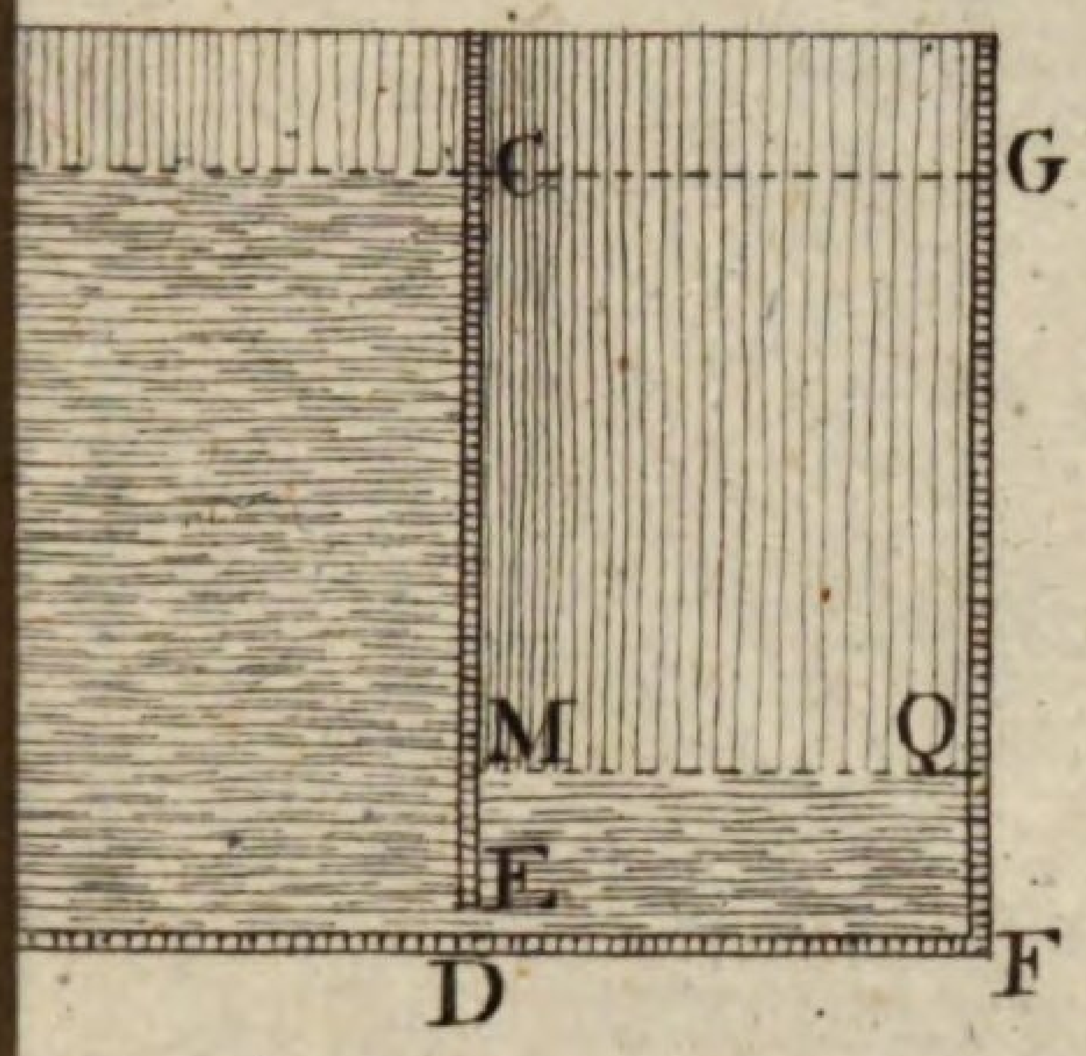


Fig. 32.

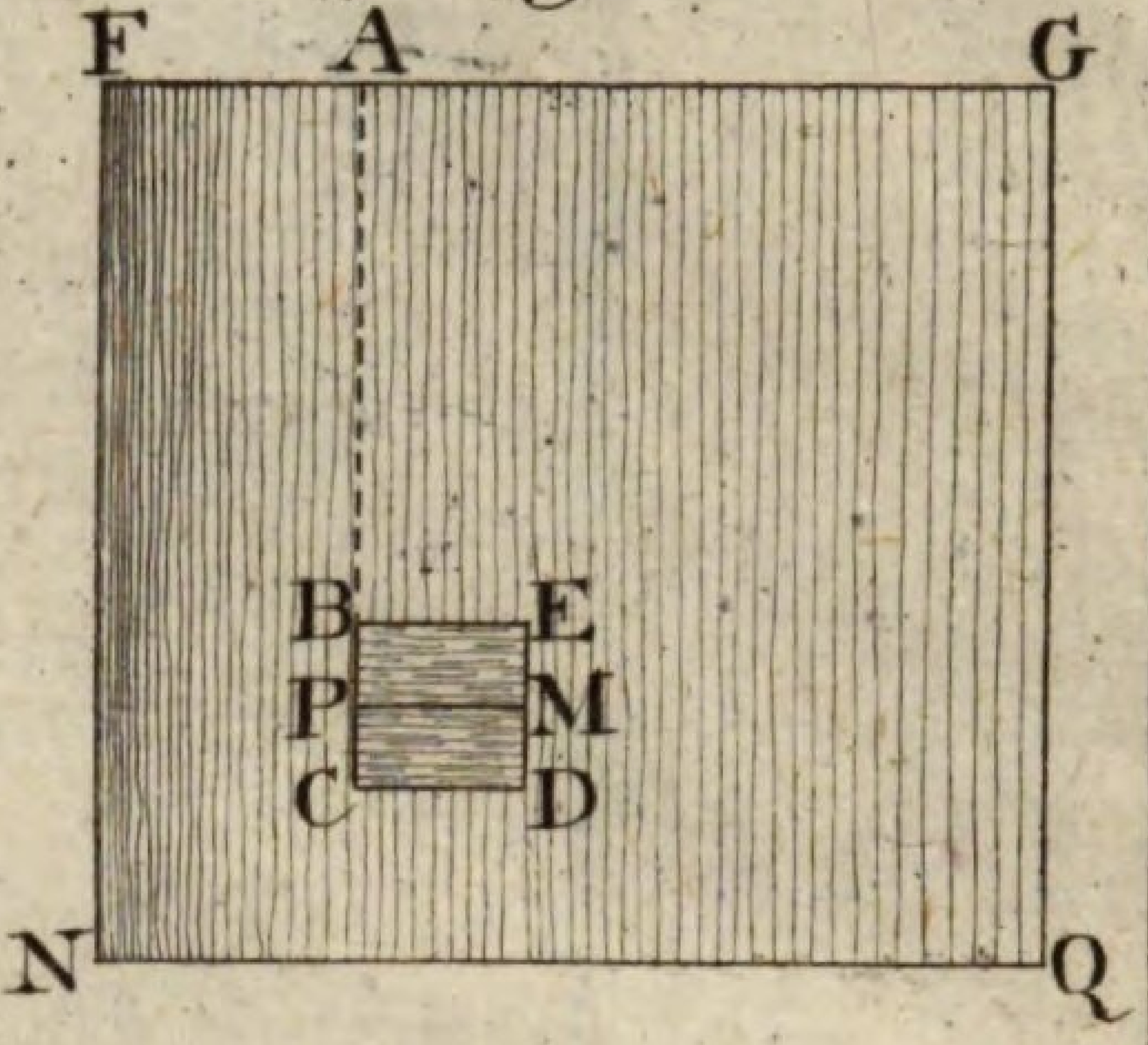


Fig. 33.

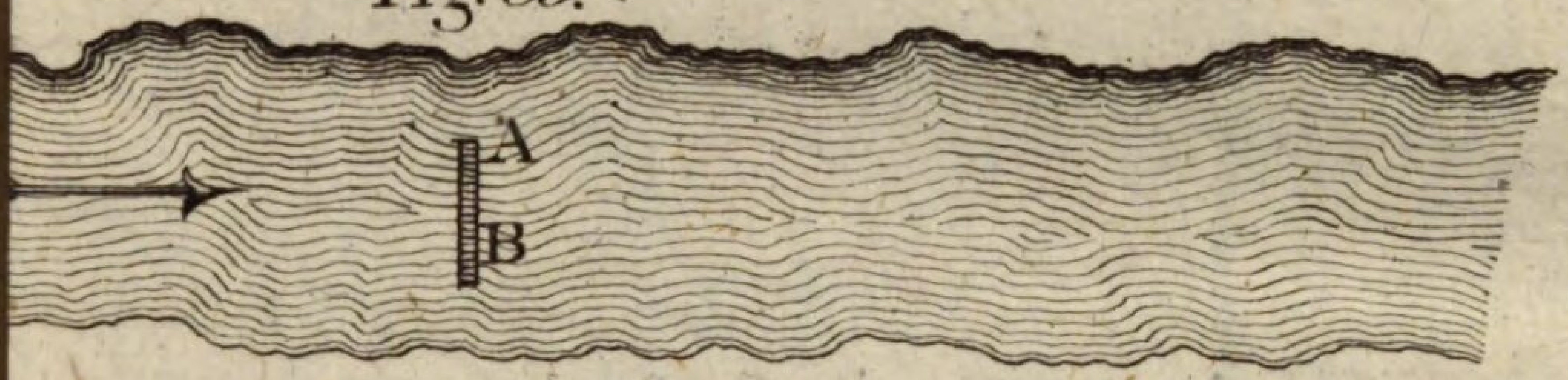


Fig. 31.

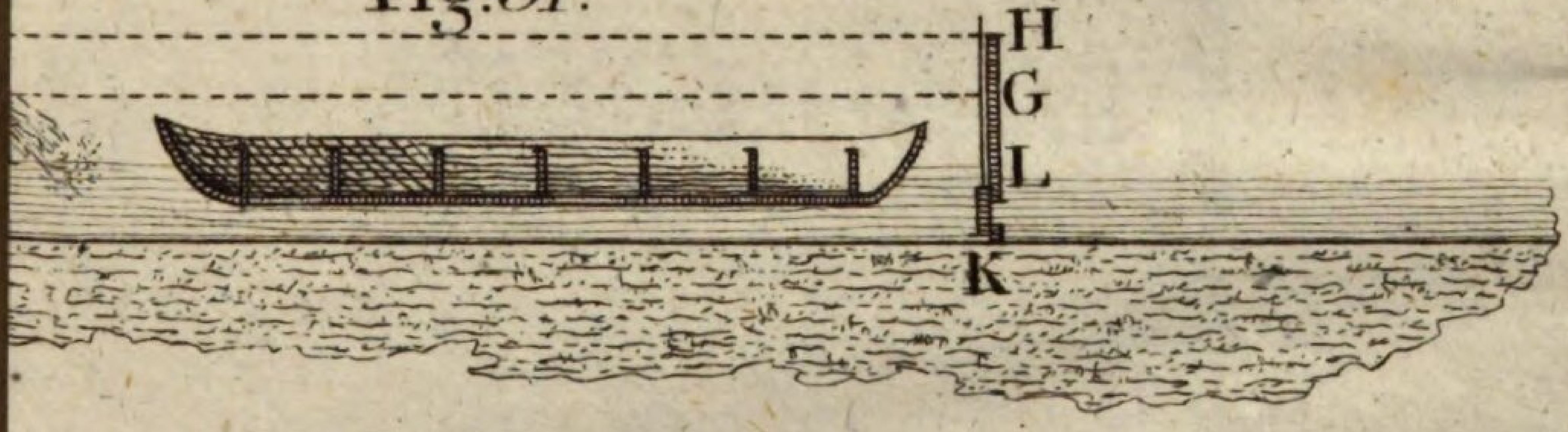
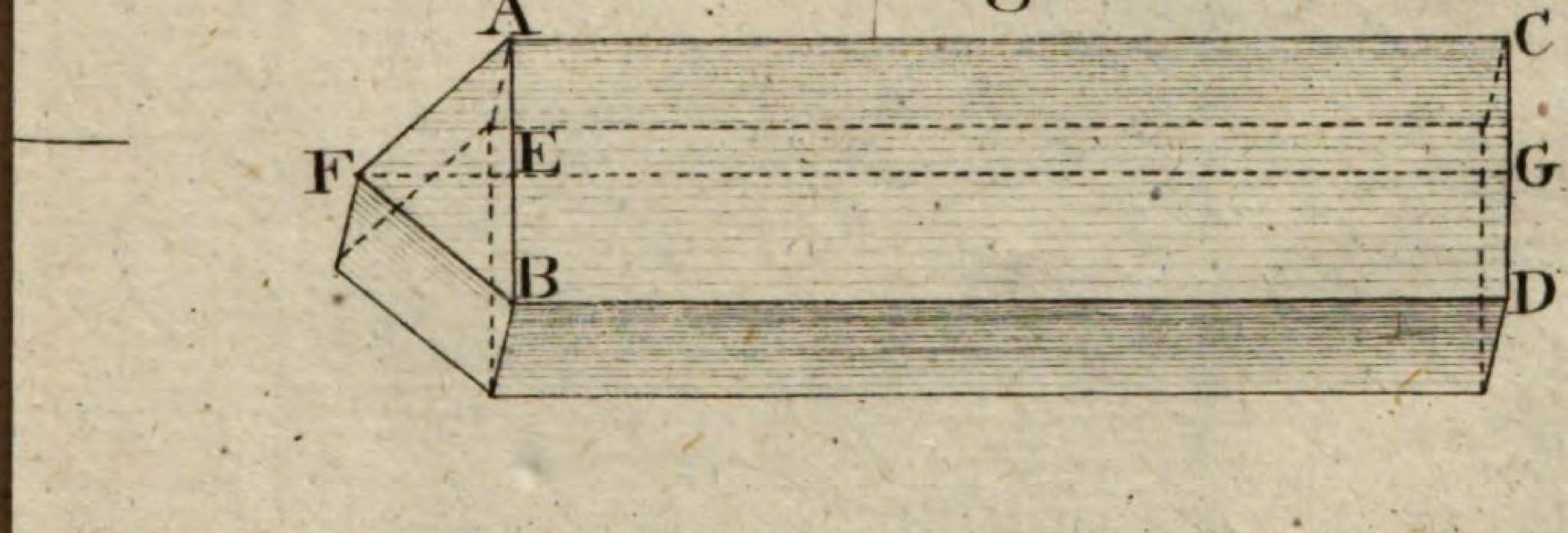


Fig. 35.



TAB. VI.

Fig: 37.

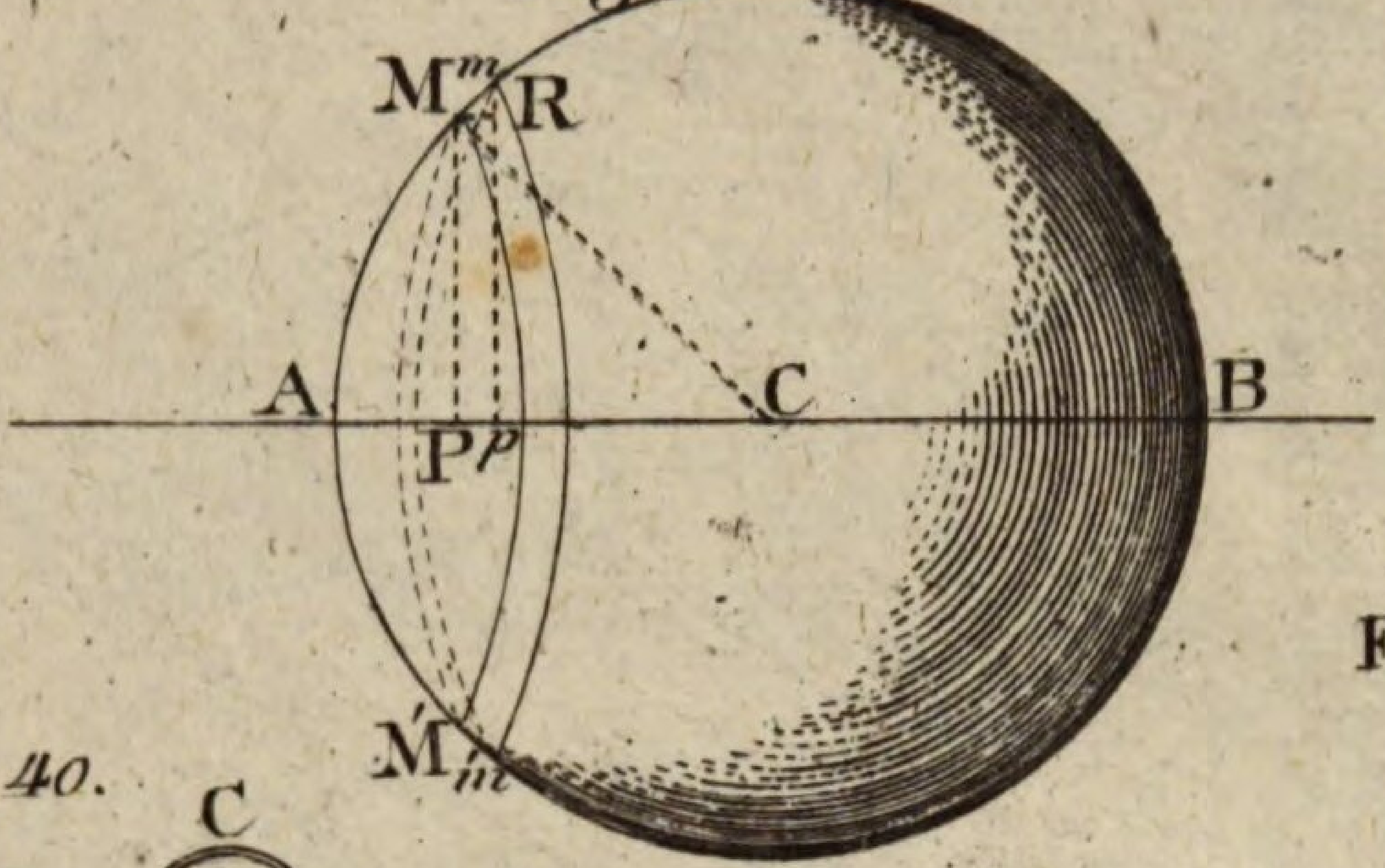


Fig. 38.

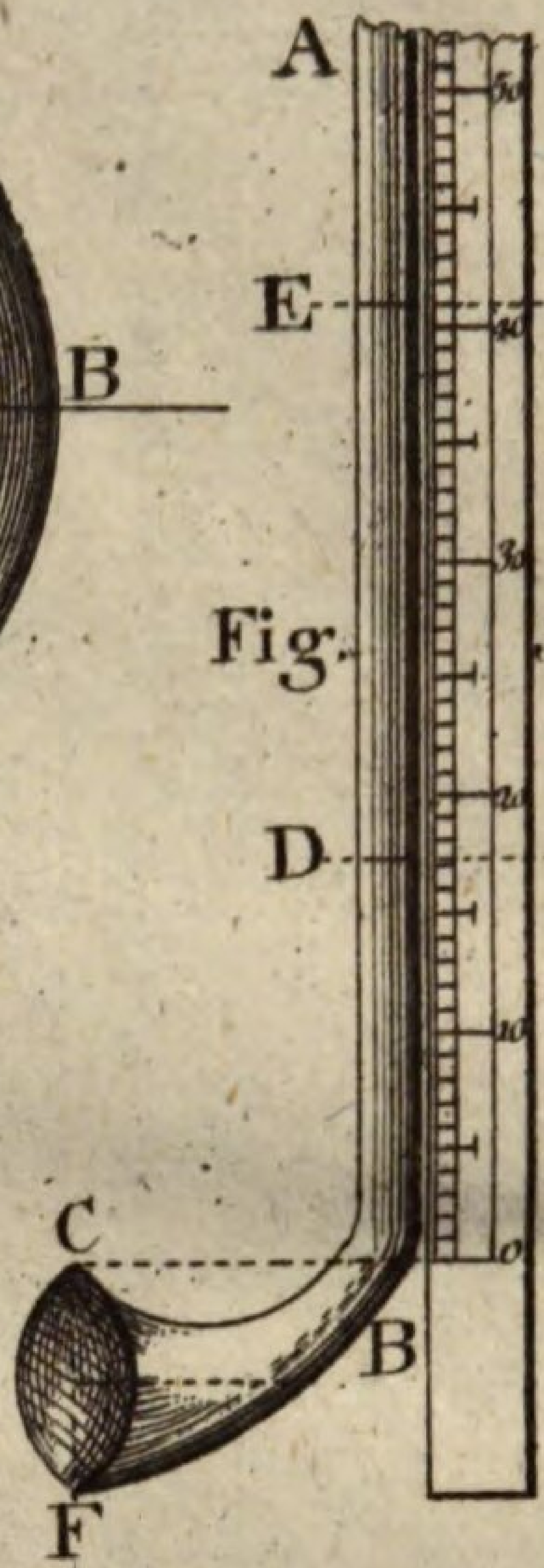
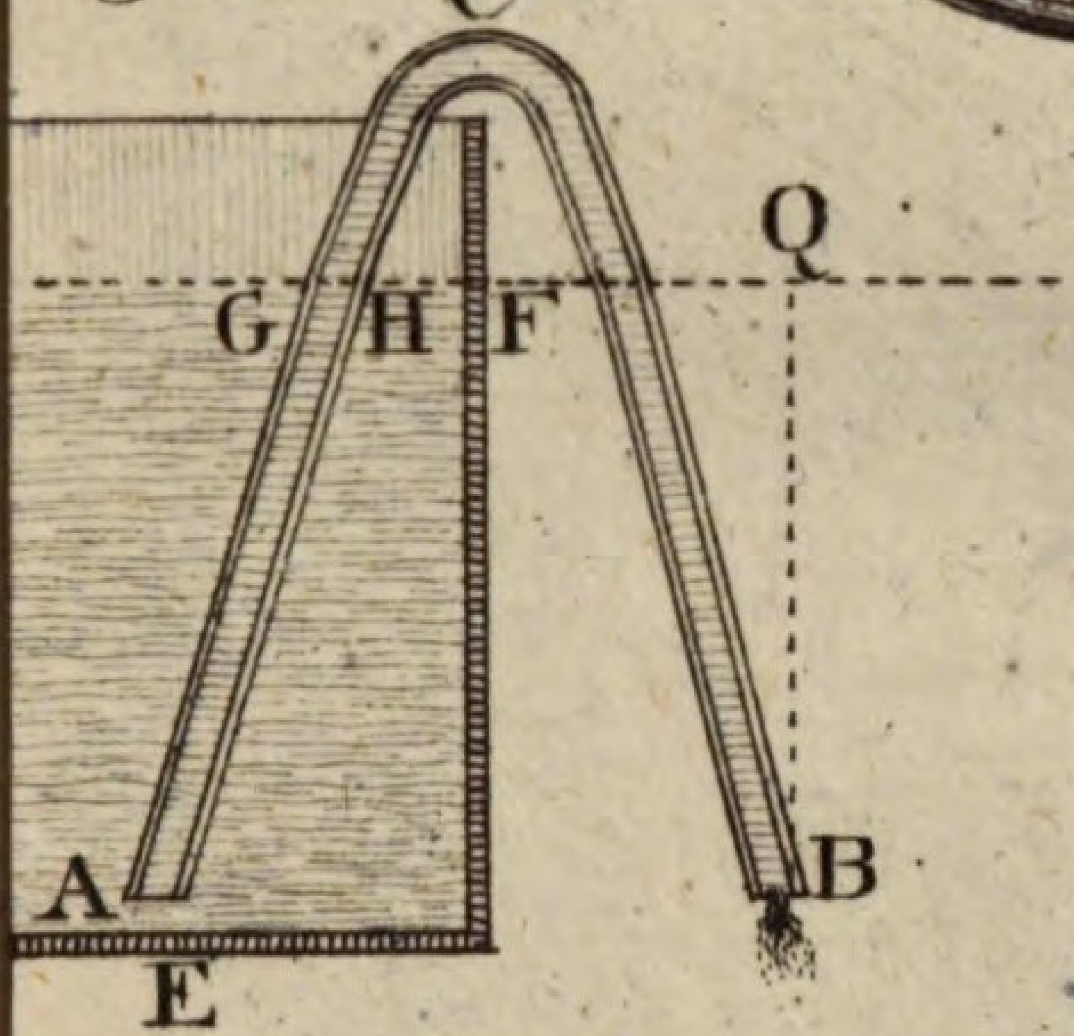
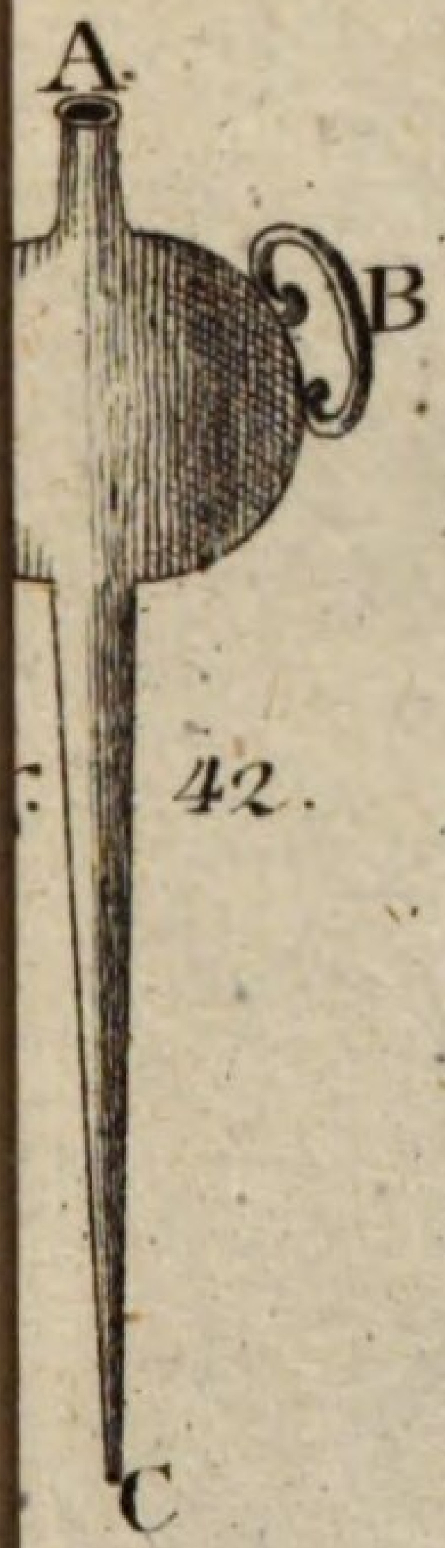


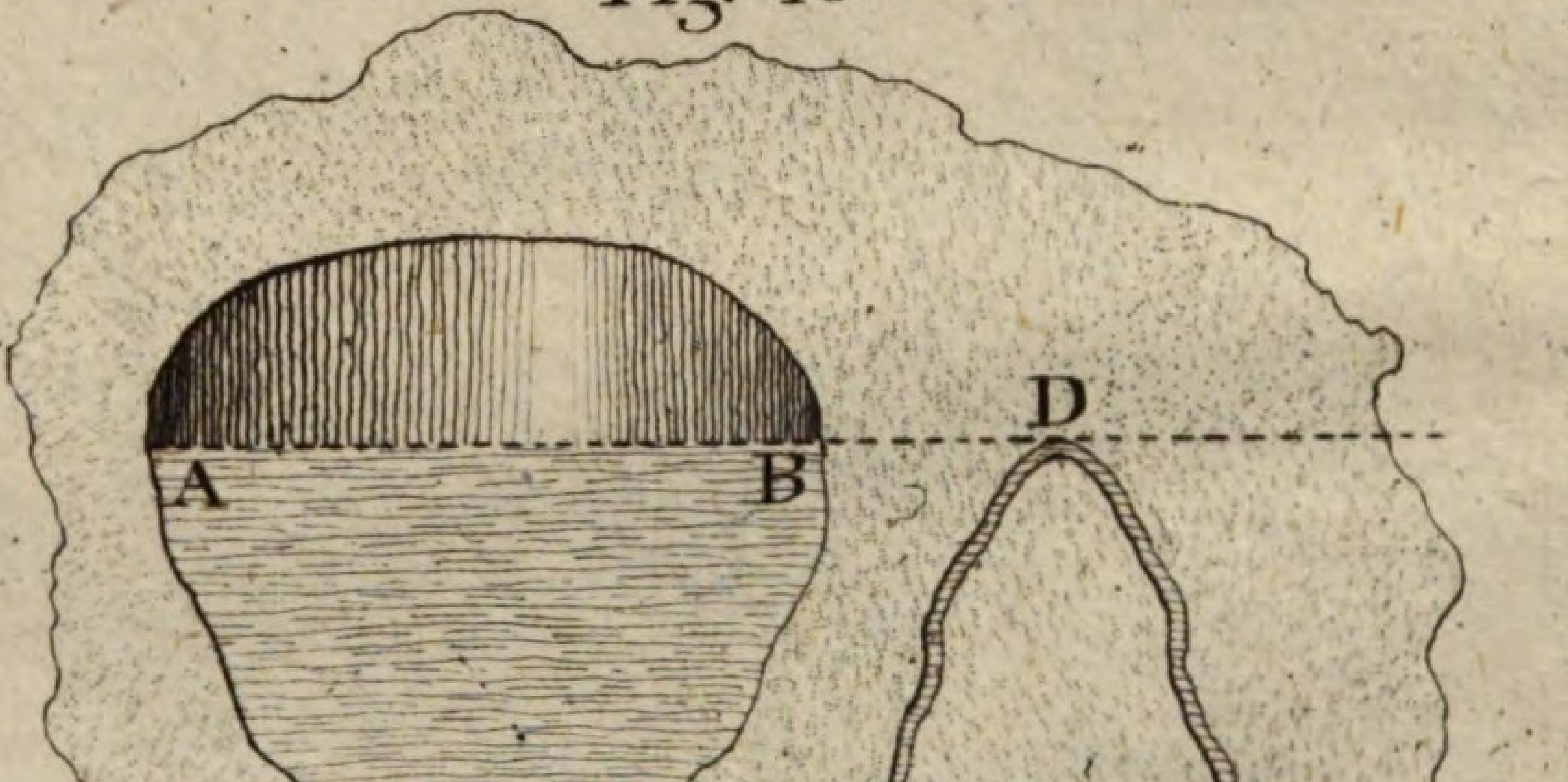
Fig: 40.

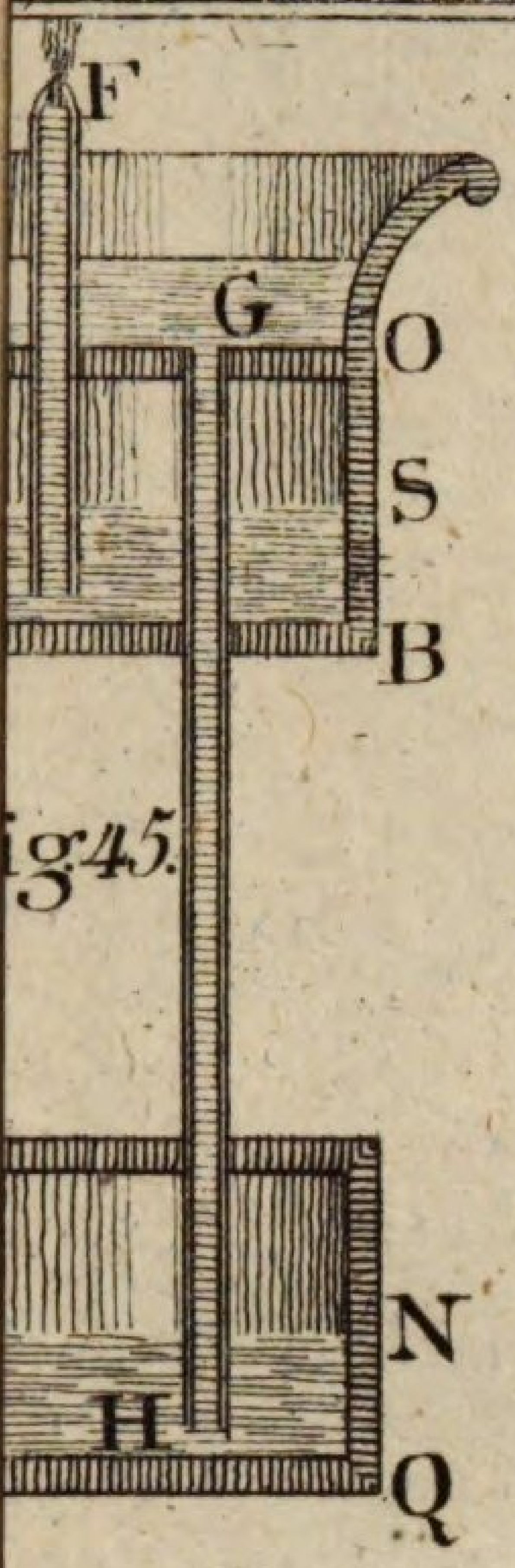




42.

Fig: 43.





ig45.

47.

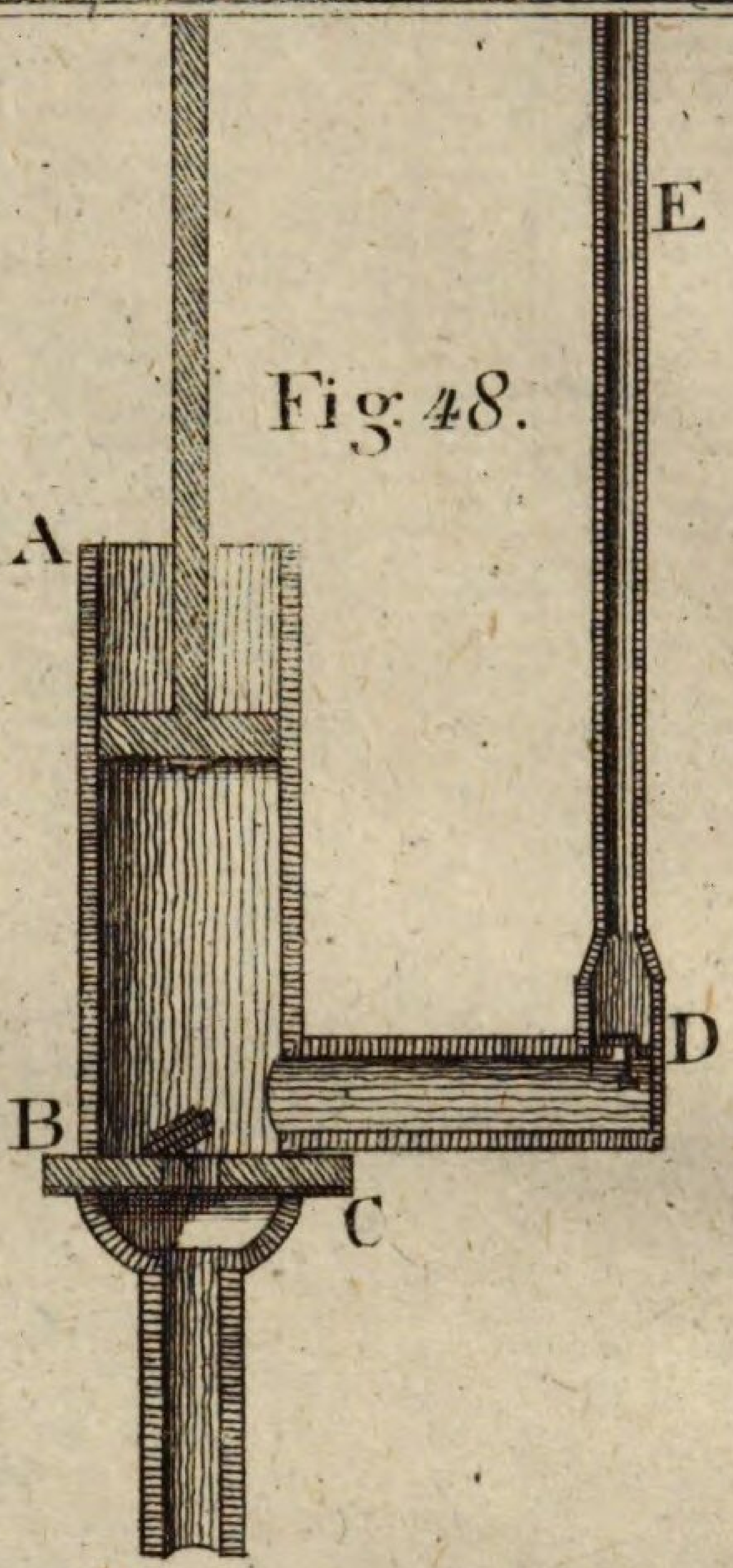


Fig: 48.

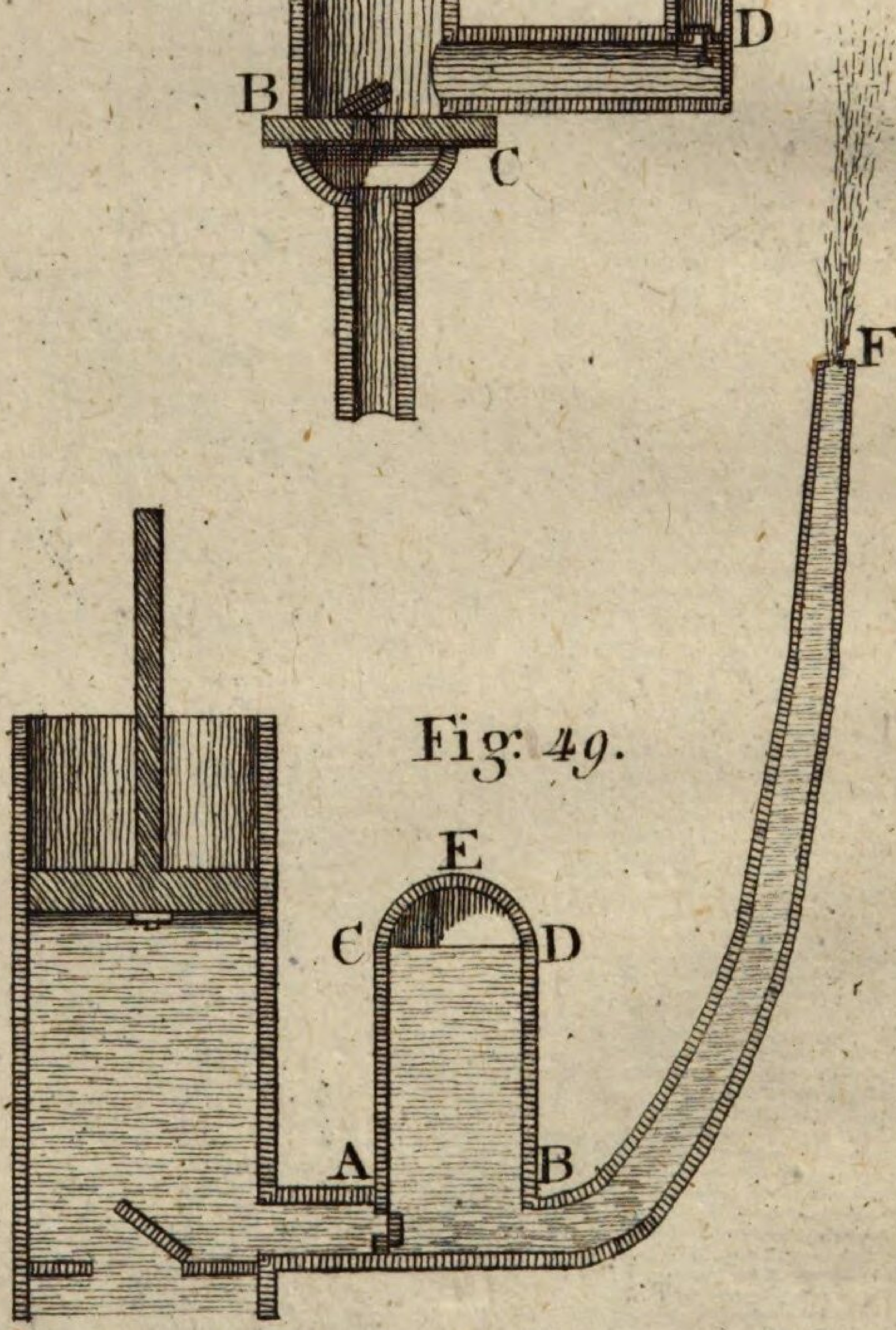


Fig: 49.

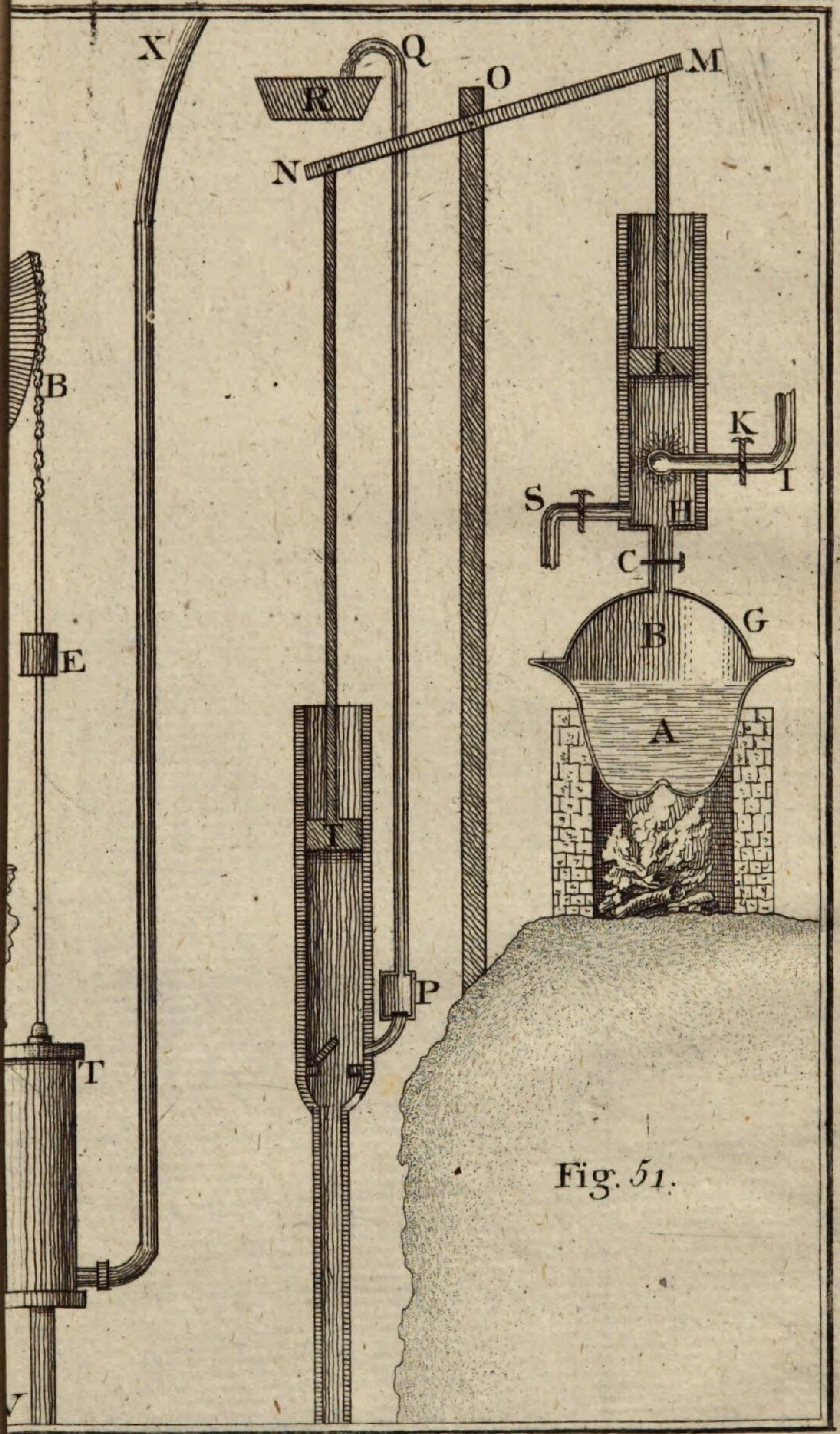


Fig. 51.

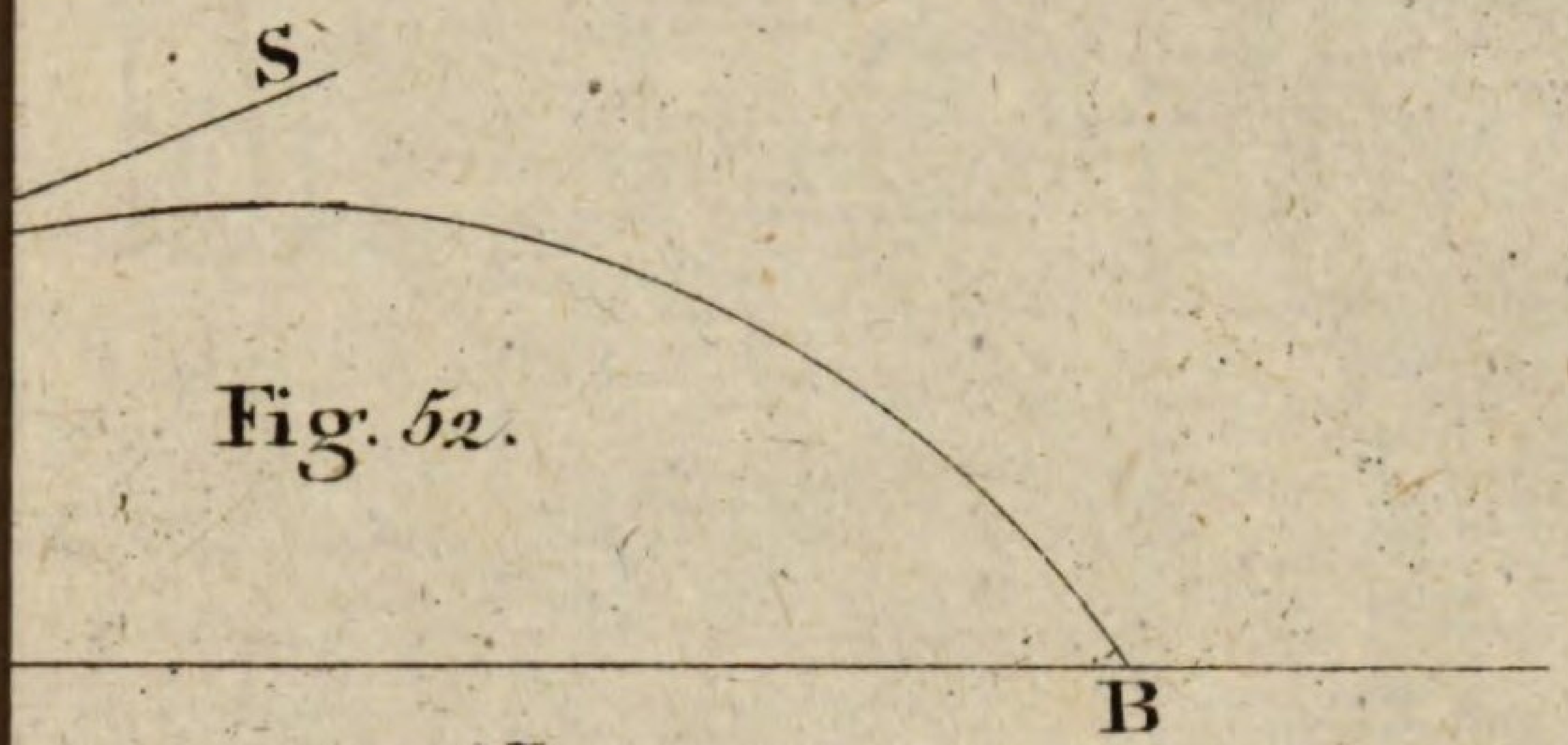


Fig. 52.

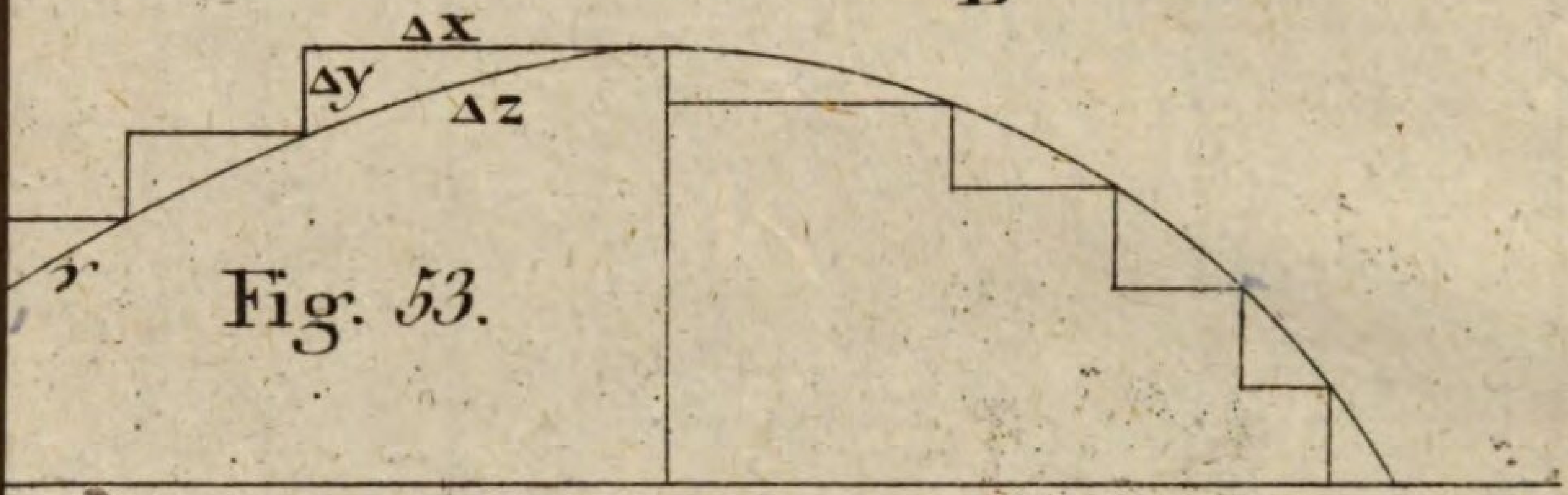


Fig. 53.

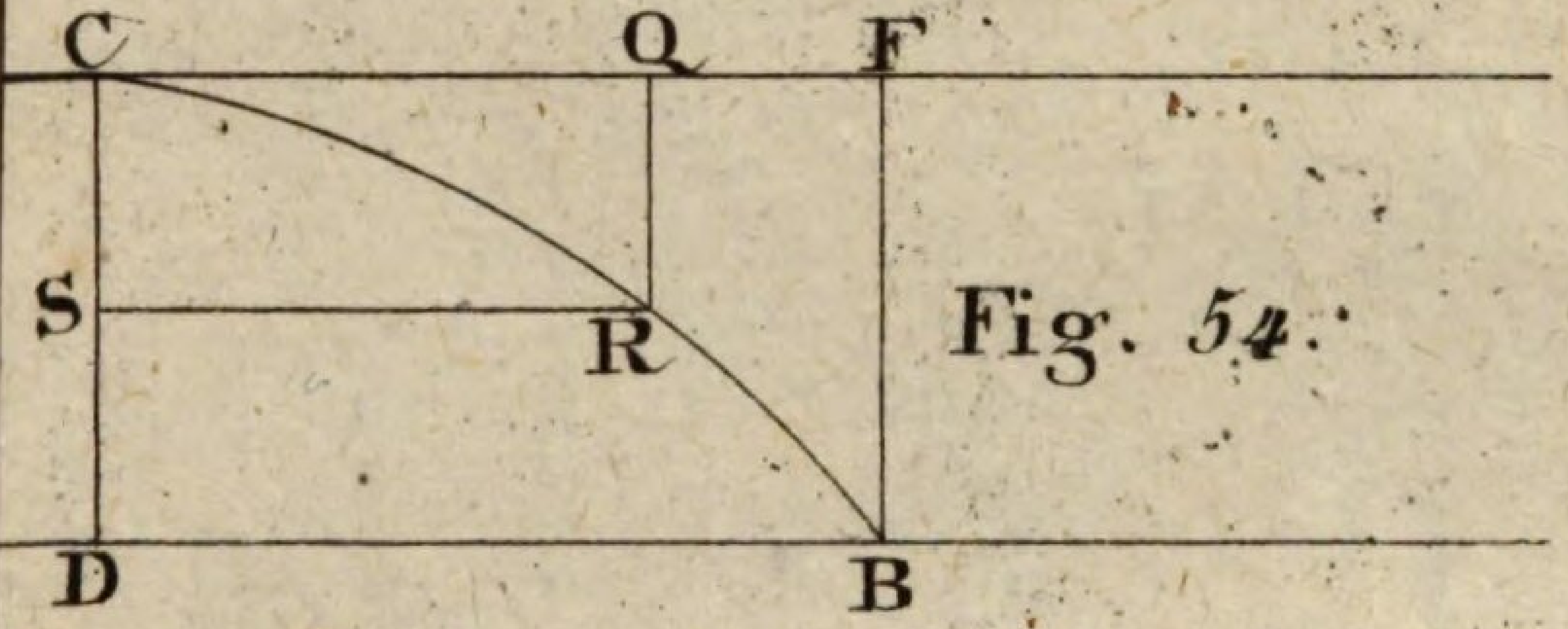


Fig. 54.

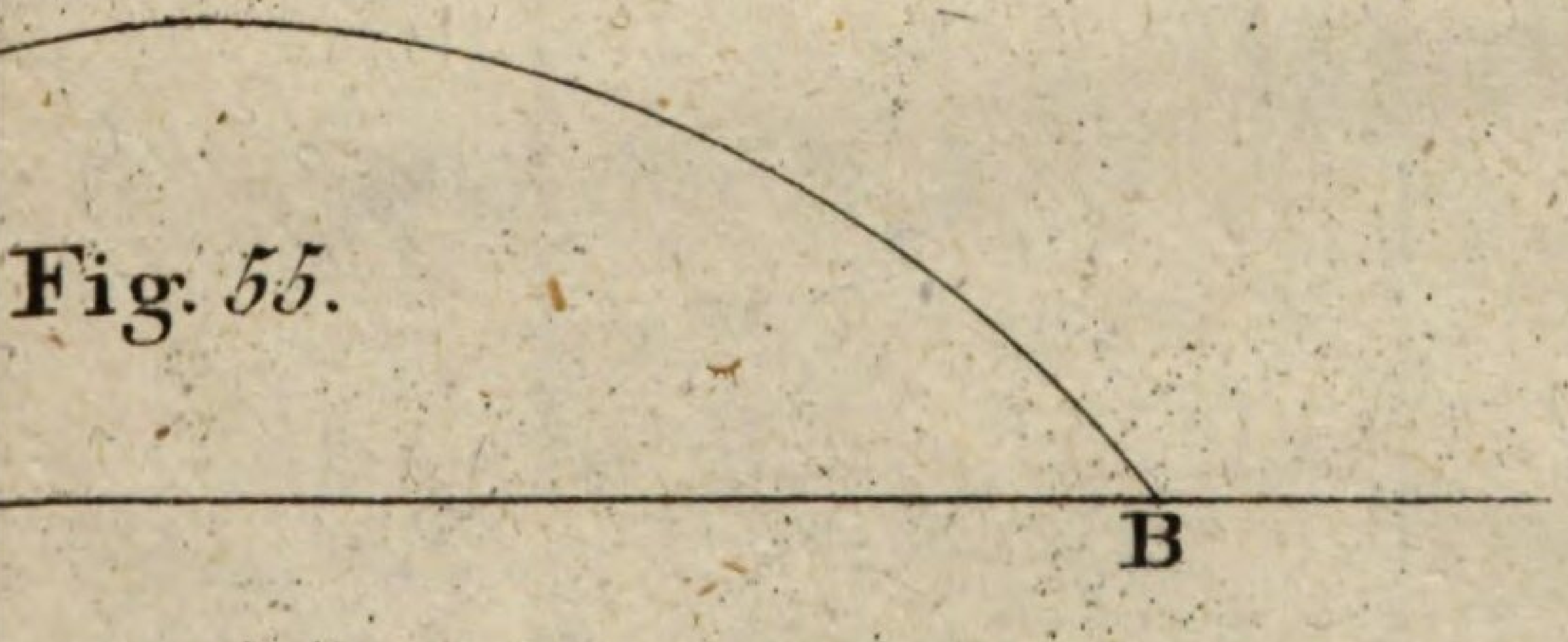
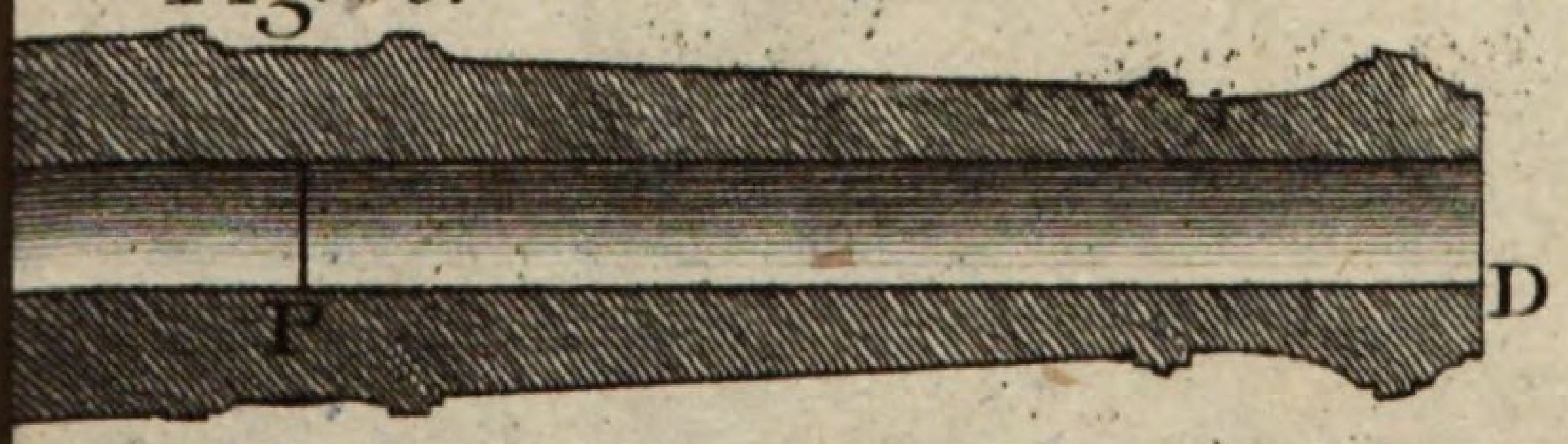


Fig. 55.

Fig. 56.



Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Vega, Georg <<von>>,

Vorlesungen über die Mathematik zum Gebrauche des Kaiserl. Königl. Artilleriekorps

Bd.: 4

Wien 1819

Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/Philos.5236(4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11112222-5
VD18 90750950-001